

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>** (1.5 β.)

i Δώστε τον ορισμό της ομοιόμορφης σύγκλισης μιας ακολουθίας συναρτήσεων.

ii Αποδείξτε ότι αν η ακολουθία συναρτήσεων  $f_n(x)$  συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση  $f(x)$  ορισμένη για  $x$  σε ένα διάστημα  $I = [a, b]$ , τότε  $M_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  και αντίστροφα.

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>** (1.5)

Να υπολογισθεί το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n^3}{(n^2 + k^2)^2}$$

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>** (2 β.) Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

(α):  $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x \, dx, \quad \alpha > 0$

(β):  $\int \frac{(x - \frac{1}{3})^2}{\sqrt{9x^2 - 6x + 5}} \, dx$

(γ):  $\int \frac{1}{\sin^3 x} \, dx$

(δ):  $\int \ln(1 + x^2) \, dx$

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>** (1.5 β.) Να υπολογισθεί ο όγκος και η επιφάνεια του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή γύρω από τον άξονα  $Ox$  του σχήματος, το οποίο περιέχεται μεταξύ της καμπύλης  $y = \sqrt{x}$  και της καμπύλης  $y = x - 2$  και του άξονα  $Ox$ , για  $x \geq 0$ .

**ΘΕΜΑ 5<sup>ο</sup>** (1.5 β.) Για ποιές τιμές του  $a$  υπάρχουν τα παρακάτω ολοκληρώματα :

$$(i) \int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^a} \, dx \quad \text{και} \quad (ii) \int_0^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^a} \, dx,$$

**ΘΕΜΑ 6<sup>ο</sup>** (2 β.)

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα  $\int_{-1}^1 |x - t| |t| \, dt$ .

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !**