

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ / ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ
ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι **ΤΜΗΜΑ Γ**

4 Ιουλίου 2007

ΘΕΜΑ 1^ο (1.5 β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_0^{\infty} e^{-2t} |x - t| dt$. Υπο-

λογίστε την παράγωγο $\frac{df}{dx}$.

ΘΕΜΑ 2^ο (1.5 β) Θεωρούμε στο επίπεδο (x, y) το κυκλικό τμήμα που ορίζεται από το τόξο του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$ και την χορδή του κύκλου, που ορίζεται από την ευθεία $y + x = 1$ για $x \in [0, 1]$. Να βρεθεί ο όγκος και η επιφάνεια του στερεού σώματος που προκύπτει από την περιστροφή του τμήματος αυτού γύρω από τον άξονα Ox

ΘΕΜΑ 3^ο (1.5 β) Δώστε τον εψιλοντικό ορισμό της ομοιόμορφης σύγκλισης για μια σειρά συναρτήσεων. Χρησιμοποιώντας τον εψιλοντικό ορισμό, να αποδείξετε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα αν συγκλίνει ομοιόμορφα

η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ για $x \in [a, b]$.

ΘΕΜΑ 4^ο (2 β.) Για ποιές τιμές του α υπάρχουν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$i) \int_0^{\infty} \left(\frac{x^\alpha}{1+x^2} \right)^4 dx, \quad ii) \int_3^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{3\alpha}}, \quad iii) \int_0^{\infty} \frac{\tanh x}{1+x^\alpha} dx, \quad iv) \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx$$

ΘΕΜΑ 5^ο (2 β) Να αποδειχθεί ότι

$$a) \int \frac{x^2}{(x-1)^3} dx = \ln(x-1) - \frac{2}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2}$$

$$b) \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\tan x} = \frac{\pi + \ln(4)}{8}$$

$$c) \int_{-2}^3 \frac{x}{\sqrt{(3-x)(x+2)}} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$d) \int_0^{\infty} x e^{-x} \sin(2\pi x) dx = \frac{4\pi}{(1+4\pi^2)^2}$$

ΘΕΜΑ 6^ο (1.5 β) Αποδείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{(n+2)^2}}^{\frac{1}{n^2}} \frac{\sin^2 x}{x^{7/2}} dx = 4$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !