

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>** (1.5 β.) Αν  $f(x)$  φραγμένη στο  $[a, b]$   $m \leq f(x) \leq M$  και  $g(x)$  ολοκληρώσιμη με σταθερό πρόσημο και  $f(x)g(x)$  ολοκληρώσιμη, αποδείξτε ότι υπάρχει  $\mu \in [m, M]$  τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx. \text{ Τι γίνεται αν η συνάρτηση } f(x) \text{ είναι συνεχής;}$$

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>** (1.5+1 +1β.)

(α): Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{(n+1)^2}}^{\frac{1}{n^2}} \frac{e^{x^2}}{x^{3/2}} dx = 2$$

(β): Να μελετηθεί η πρώτη παράγωγος  $f'(x)$  και η δεύτερη παράγωγος  $f''(x)$  όπου  $f(x) =$

$$\int_{-1}^1 |t-x| \sin(\pi t) dx \text{ για } x \in \mathbb{R}$$

(γ): Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k-1+2n}{k-1+n} = 1 + \ln 2$$

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>** (2 β.) Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

$$(α) \int \frac{dx}{3 + 4 \tan x} = \frac{3x + 4 \ln(3 \cos(x) + 4 \sin(x))}{25}$$

$$(β) \int x \arctan(x) dx = \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctan(x)$$

$$(γ) \int_3^4 x \sqrt{(x-3)(4-x)} dx = \frac{7\pi}{16}$$

$$(δ) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\cos 3x}{\cos x} \right)^2 dx = 3\pi$$

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>** (1 β.) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του παραβολοειδούς που δημιουργείται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα  $0x$  της καμπύλης  $y^2 = 2\pi x$ ,  $0 \leq x \leq a$

**ΘΕΜΑ 5<sup>ο</sup>** (2 β.) Για ποιές τιμές του  $a$  υπάρχουν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$(i) \int_0^{\infty} x^a \sin(x^2) dx \text{ και } (ii) \int_0^1 x^a \tanh\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$$

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !**