ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ / ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

ΤΜΗΜΑ 2β

1 Ιουνίου 2005

ΘΕΜΑ 1^o (0.5+0.75+0.75=2)

α) Ποιός είναι ο ορισμός μιας σειράς συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα σε ένα διάστημα $[a,\, b]$;

β) Απόδείξτε το κριτήριο $Weierstrass(M-test)$, ότι δηλαδή άν $|f_n(x)| \leq M_n$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ συγκλίνει τότε και η σειρά συναρτήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα.

γ) Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{1+n^2x^2}\right)^2$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $x \geq 0$

Λύση: Για το (α) και (β) δες την θεωρία στο δίκτυο Ομοιόμορφη σύγκλιση σειρών Πρόταση 7.
Η σειρά συναρτήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα (uniform convergence) στην συνάρτηση $S(x)$ αν

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = S(x), \text{ ομοιόμορφα}$$

$$\Updownarrow$$

Η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση $S(x)$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \epsilon \ \forall x \in I \ \exists N(\epsilon) : n > N(\epsilon) \rightsquigarrow |S_n(x) - S(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - S(x)\right| < \epsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \epsilon \ \forall x \in I \ \exists N(\epsilon) : n > m > N(\epsilon) \rightsquigarrow |S_n(x) - S_m(x)| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| < \epsilon$$

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad \text{ΚΑΙ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n \quad \text{συγκλίνει}$$

Weierstrass M-Test

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα}$$

Αποδ.
$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \quad \text{συγκλίνει} \ \Leftrightarrow$$
$$\forall \epsilon \ \ \forall x \in I \ \ \exists N(\epsilon) \ : \ n > m > N(\epsilon) \ \rightsquigarrow \ \sum_{k=m+1}^{n} M_k < \epsilon$$
αλλά
$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} M_k < \epsilon$$

Για το (γ), έχουμε
$$g_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}, \quad g_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{1+n^2x^2} \ \rightsquigarrow \ g_n'(1/n) = 0 \ \rightsquigarrow \ g_n(1/n) = \max\{g_n(x)\} = \frac{1}{2n}; \rightsquigarrow \ g_n(x) \leq \frac{1}{2n}, \quad \text{για} \ x \geq 0$$
οπότε
$$\left(\frac{x}{1+n^2x^2}\right)^2 \leq M_n = \frac{1}{4n^2} \ \rightsquigarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty \ \rightsquigarrow$$
Η σειρά συγκλίνει
Αλλη λύση :(Από ένα γραπτό)
$$f_n(x) = \left(\frac{x}{1+n^2x^2}\right)^2 \leq \frac{x^2}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{\frac{1}{x^2}+n^2} < \frac{1}{n^2} = M_n \ !!!$$
Αυτή η ανισότητα ισχύει για $0 < x < \infty$. Αλλά και για $x = 0$ έχουμε $f_n(0) = 0 < M_n$ οπότε ικανοποιούνται οι υποθέσεις για το M-test $0 \leq x < \infty$

ΘΕΜΑ 2^o (0.5+0.75+0.75=2) Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

(α) $\int\limits_0^1 \frac{(\arctan x)^n}{1+x^2}\,dx \ = \ \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}}{n+1}$

Λύση :
$$\int\limits_0^1 \frac{(\arctan x)^n}{1+x^2}\,dx \ = \int\limits_0^1 (\arctan x)^n d(\arctan x) \ = \ \frac{(\arctan x)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_{x=0}^{x=1} \ = \ \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}}{n+1}$$

(β) $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{5+4\cos x} \ = \ \frac{\pi}{3}$,

Λύση :
$$t = \tan\frac{x}{2} \ \rightsquigarrow \ \frac{x}{2} = \arctan t \ \rightsquigarrow \ dx = \frac{2}{1+t^2}$$
$$1+t^2 = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \ \rightsquigarrow \ \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2} \ \rightsquigarrow \ \cos x \ = \ \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{5+4\cos x} \ \underbrace{=}_{t=\tan\frac{x}{2}} \ \int_{t=0}^{t=\infty} \frac{1}{\left(5+4\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \frac{2\,dt}{1+t^2} = \int\limits_{t=0}^{t=\infty} \frac{2dt}{9+t^2} \underbrace{=}_{t=3u} \frac{2}{3} \int\limits_{u=0}^{u=\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\cancel{2}}{3}\frac{\pi}{\cancel{2}}$$

(γ) $\int\limits_2^3 \frac{x}{\sqrt{(3-x)(x-2)}}\,dx = \frac{5\pi}{2}$

Λύση:

$$(3-x)(x-2) = -6+5x-x^2 = -6+\frac{25}{4}-\left(\frac{5^2}{2^2}-2\frac{5}{2}x+x^2\right) = \frac{1}{4}-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 \rightsquigarrow x-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}\sin t$$

$$\int\limits_2^3 \frac{x}{\sqrt{(3-x)(x-2)}}\,dx \underbrace{=}_{x=\frac{1}{2}\sin t+\frac{5}{2}} \int\limits_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\frac{1}{2}\sin t+\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}\cos t}\right)\frac{1}{2}\cos t\,dt = \frac{5}{2}\pi$$

ΘΕΜΑ 3^o (2) Να βρεθεί το όριο:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4}$$

Λύση:

$$I = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

Αν θεωρήσουμε το διάστημα $[0,1]$ και την διαμέριση

$$P_n = \left\{x_0=0, x_1=\frac{1}{n}, x_2=\frac{2}{n},\ldots,x_k=\frac{k}{n},\ldots,x_n=\frac{n}{n}=1\right\} \rightsquigarrow \triangle x_k = \frac{1}{n}$$

διαλέγουμε την επιλογή σημείων:

$$T_n = \left\{\xi_1=\frac{1}{n},\xi_2=\frac{2}{n},\ldots,\xi_k=\frac{k}{n},\ldots,\xi_n=1\right\}$$

Αν $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ τότε το άθροισμα Riemann

$$S(P_n,T_n,f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\triangle x_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

Επειδή η συνάρτηση $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη, δηλαδή υπάρχει το ολοκλήρωμα Riemann

$$\lim_{n\to\infty}S(P_n,T_n,f) = \int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

ΘΕΜΑ 4^o Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας, που δημιουργείται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα Ox του τμήματος της κυκλοειδούς που δίνεται από την παραμετρική εξίσωση:

$$x = a\,(\theta-\sin\theta)\,,\quad y = a\,(1-\cos\theta)\,,\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

Λύση:

$$S = 2\pi\int_A^B y\sqrt{dx^2+dy^2} = 2\pi\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} y\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta =$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos\theta)\sqrt{(1-\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}\,d\theta = 2\pi a^2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos\theta)\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta =$$

$$= 2^3\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^3 d\theta = -2^4\pi a^2 \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left(1-\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2\right) d\left(\cos\frac{\theta}{2}\right) =$$

$$\underbrace{=}_{u=\cos\frac{\theta}{2}} 2^4\pi a^2 \int_{u=1/\sqrt{2}}^{u=1} \left(1-u^2\right) du = 2^4\pi a^2 \left(u-\frac{u^3}{3}\right)\Bigg|_{u=1/\sqrt{2}}^{u=1} = 2^4\pi a^2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6\sqrt{2}}\right)$$

ΘΕΜΑ 5^o (2 β.) Μελετείστε την ύπαρξη των ολοκληρωμάτων

$$(a) \quad \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^{1/2}}\,dx, \qquad (b) \int_0^1 \frac{x(1-x)}{\ln\, x}\,dx$$

Λύση: (a) Το ολοκλήρωμά μας είναι άθροισμα δυο γενικευμένωνν ολοκληρωμάτων

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^{1/2}}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^{1/2}}\,dx}_{\beta'\ \text{είδους}} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^{1/2}}\,dx}_{\alpha'\ \text{είδους}}$$

$$\text{για } x\in[0,\,1] \quad \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^{1/2}} \le \frac{1}{x^{1/2}} \quad \text{και} \int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx = 2 \rightsquigarrow \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^{1/2}}\,dx \le 2$$

$$\text{για } x\in[1,\,1\infty] \quad \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^{1/2}} \le \mathrm{e}^{-x} \quad \text{και} \int_1^\infty \mathrm{e}^{-x}\,dx = \frac{1}{e} \rightsquigarrow \int_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^{1/2}}\,dx \le \frac{1}{e}$$

(b) Θέτουμε $f(x) = \frac{x(1-x)}{\ln\, x}$. Η συνάρτηση αυτή είναι συναχής στο διάστημα $[0,\,1]$, γιατί για $x\in(0,\,1)$ ορίζεται και είναι συνεχής.

$$\text{για } x=0 \quad \lim_{x\to 0}\frac{x(1-x)}{\ln\, x} = 0, \qquad \text{για } x=1 \quad \lim_{x\to 1}\frac{x(1-x)}{\ln\, x} = \lim_{x\to 1} x \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)}{\ln\, x} = -1$$

οπότε η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,\,1]$.