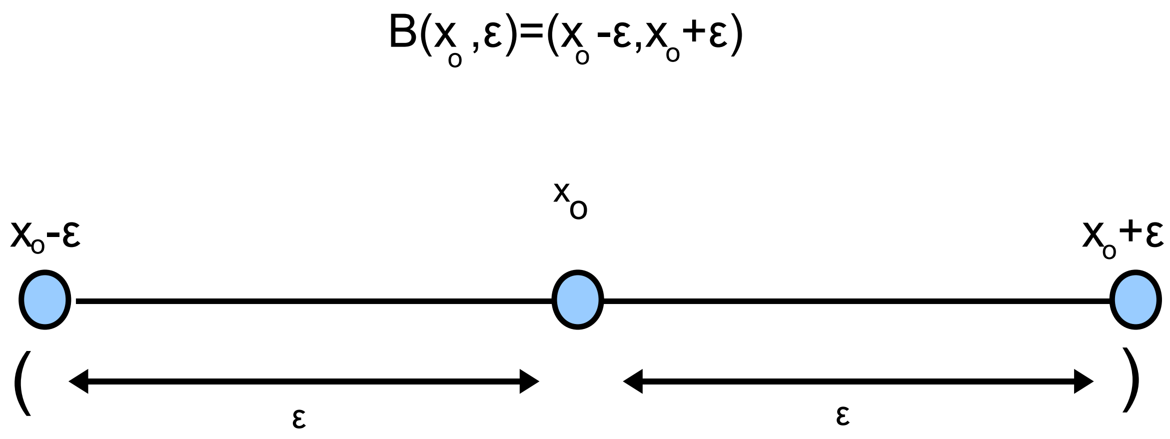
Ανοικτό διάστημα $\equiv (a,\, b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\}$

Ορισμός ανοικτής περιοχής ή "σφαίρας" ή "μπάλας"

$(x_0 - \epsilon,\, x_0 + \epsilon) \equiv B(x_0, \epsilon) \equiv$ (ανοικτή) περιοχή του x_0 ακτίνας ϵ



Σημεία συσσώρευσης και απομονωμένα σημεία

Σημείο συσσώρευσης

x_0 σημείο συσσώρευσης του A

$$\forall \epsilon > 0 \quad (B(x_0, \epsilon) - \{x_0\}) \bigcap A \neq \emptyset \quad \text{ή}$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists x \in A \;\; \text{και} \;\; x \neq x_0 \;\; \rightsquigarrow \;\; |x - x_0| < \epsilon$$

Παράδειγμα: $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$, το $0 \notin A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A.

Απομονωμένο ή μεμονωμένο σημείο

x_0 απομονωμένο ή μεμονωμένο σημείο του $A \Leftrightarrow$ το x_0 δεν είναι σημείο συσσώρευσης

$$\exists \epsilon > 0 \quad B(x_0, \epsilon) \bigcap A = \{x_0\} \quad \text{ή}$$

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall x \in A \;\; \text{και} \;\; x \neq x_0 \;\; \rightsquigarrow \;\; |x - x_0| \geq \epsilon$$

Παράδειγμα: $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$, το $\frac{1}{5} \in A$ είναι απομονωμένο σημείο του A.

Θεώρημα Bolzano Weierstrass

Πρόταση

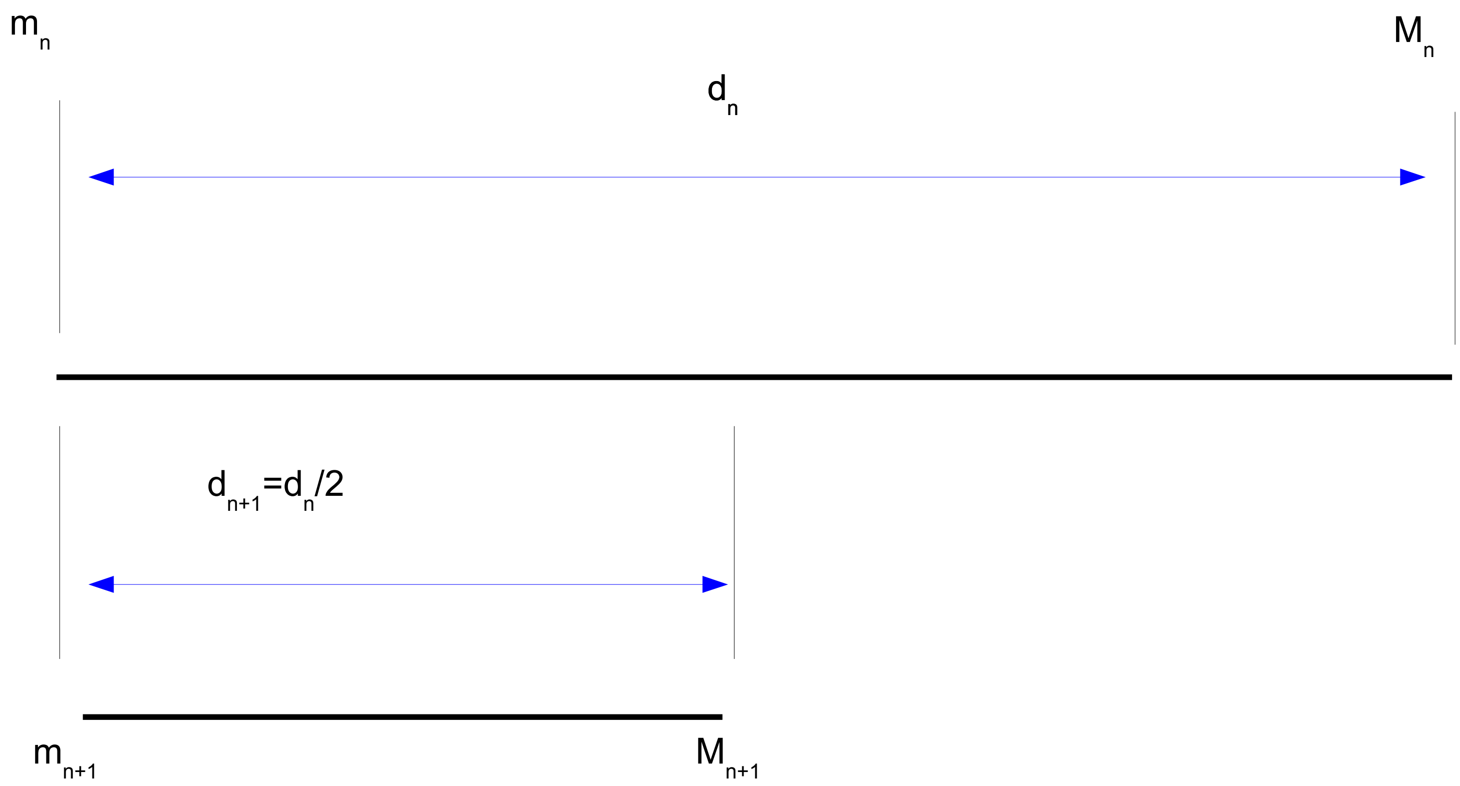
Αν a είναι σημείο συσσώρευσης του $A \Rightarrow$ Το A έχει άπειρο αριθμό στοιχείων (τουλάχιστον αριθμήσιμο) .

Θεώρημα Bolzano Weierstrass

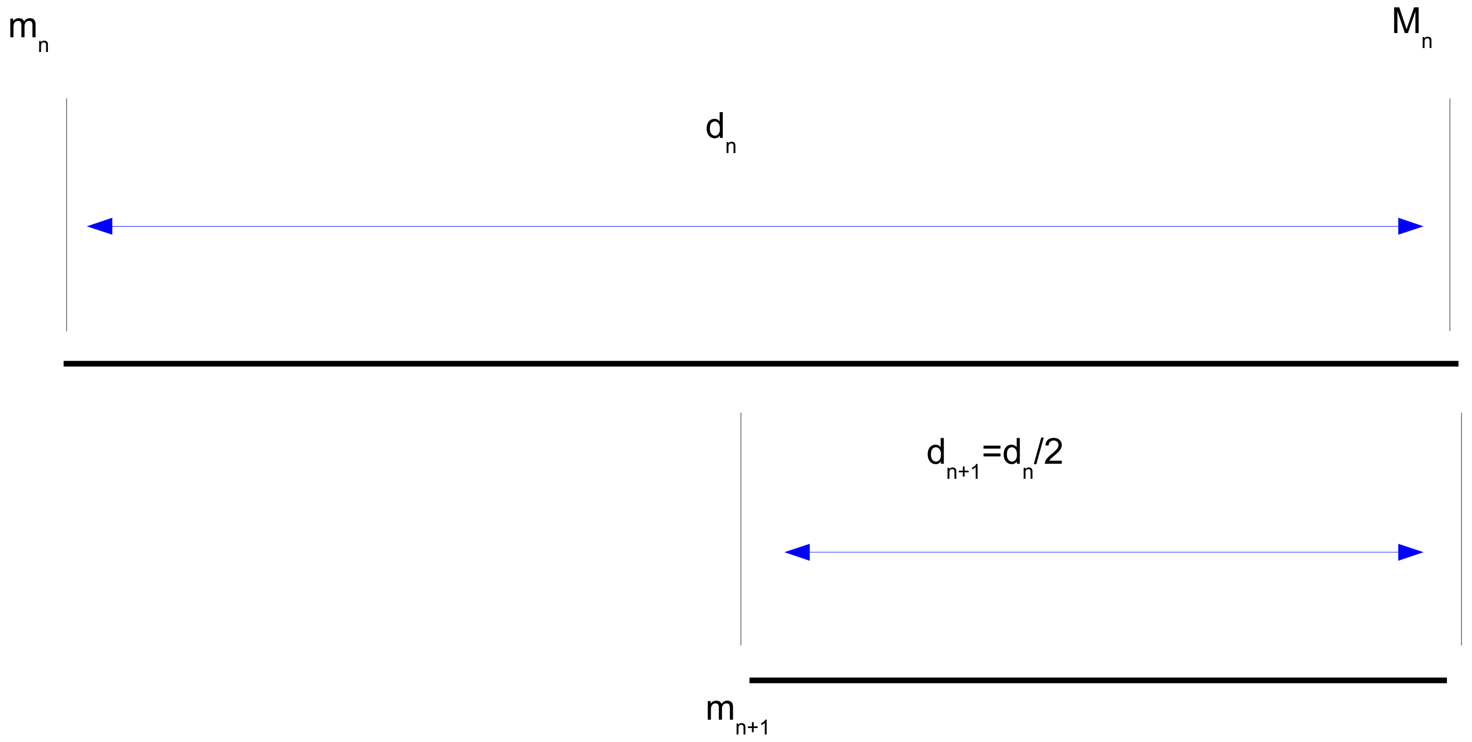
Κάθε (άνω και κάτω) φραγμένο απειροσύνολο A έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης

Συμπέρασμα

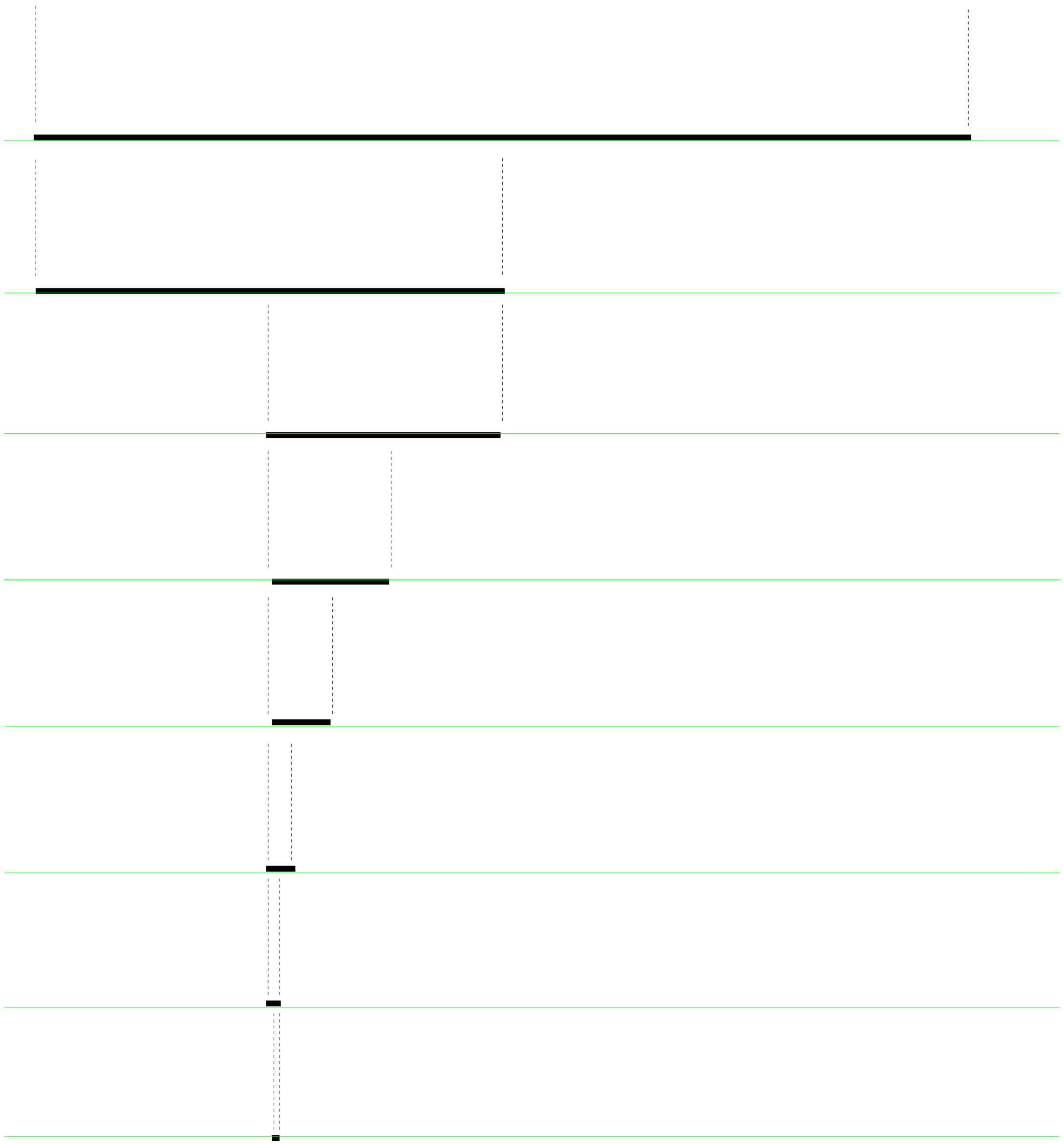
A φραγμένο απειροσύνολο $\Rightarrow \exists$ σημείο συσσώρευσης



m_n
M_n
d_n
$d_{n+1}=d_n/2$
m_{n+1}
M_{n+1}



m_n
M_n
d_n
$d_{n+1}=d_n/2$
m_{n+1}



Πρόταση

Αν a είναι σημείο συσσώρευσης του $A \Rightarrow$ Το A έχει άπειρο αριθμό στοιχείων.

Απόδειξη

Εστω $\boxed{A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}}$ έχει n στοιχεία και $\boxed{\text{σημείο συσσώρευσης το } a}$ θέτουμε

$$\epsilon = \min\left\{\frac{1}{2}|a_k - a|, k = 1, 2, \ldots, n\right\}$$

$$\forall\, x \in A \rightsquigarrow |a - x| > \epsilon \ \rightsquigarrow \boxed{a \text{ όχι σημ. συσσώρευσης}}$$

$\rightsquigarrow$ Ατοπο

Θεώρημα Bolzano Weierstrass

Κάθε (άνω και κάτω) φραγμένο απειροσύνολο A έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης

Απόδειξη

$$\forall x \in A \ \rightsquigarrow \ \inf\ A = m_0 \leq x \leq M_0 = \sup\ A$$

$$d_0 = M_0 - m_0 \ \rightsquigarrow \ d_1 = \frac{d_0}{2} = \frac{M_0 - m_0}{2}$$

ή
Χωρίζουμε το διάστημα $[m_0,\, M_0]$ σε δύο ίσα μέρη, σε κάποιο από αυτά υπάρχουν άπειρα στοιχεία του A αυτό το διάστημα το ονομάζουμε $[m_1,\, M_1] \rightsquigarrow d_2 = \frac{d_1}{2} = \frac{d_0}{2^2}$. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία n φορές.

$$m_0 \leq m_1 \leq \cdots \leq m_n \leq M_n \leq \cdots \leq M_1 \leq M_0$$

$$d_n = \frac{M_{n-1} - m_{n-1}}{2} = \frac{d_0}{2^n}$$

$$\sup\{m_n,\ n \in \mathbb{N}\} = \xi \leq \eta = \inf\{M_n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

$$\text{Υποθ } \boxed{\xi < \eta} \ \rightsquigarrow \ \exists k \in \mathbb{N} : \frac{d_0}{2^k} < \eta - \xi < M_k - m_k = \frac{d_0}{2^k} \ \rightsquigarrow \ \boxed{\text{άτοπο}}$$

Αρα $\xi = \eta$

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \rightsquigarrow \ \xi - m_k \leq \frac{d_0}{2^k} \quad \text{και} \quad M_k - \xi \leq \frac{d_0}{2^k} \ \rightsquigarrow \ [m_k, M_k] \subset B(\xi, \frac{d_0}{2^k})$$

$$\forall \epsilon > 0\, \exists k \in \mathbb{N} : \epsilon > \frac{d_0}{k} > \frac{d_0}{2^k} \ \rightsquigarrow \ [m_k, M_k] \subset B(\xi, \frac{d_0}{2^k}) \subset B(\xi, \epsilon)$$

$$[m_k, M_k] \bigcap A \neq \emptyset \ \rightsquigarrow \ B(\xi, \epsilon) \bigcap A \neq \emptyset$$

Το $B(\xi, \epsilon) \bigcap A$ έχει άπειρα στοιχεία του A επομένως το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A

Ορισμός

Ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \equiv$ λίστα στοιχείων $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$.
$x_n \equiv$ είναι ο γενικός όρος

Ισοδύναμος ορισμός

Ακολουθία είναι μια απεικόνιση του $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{R}$

$$\mathbb{N} \ni n \xrightarrow{f} f(n) = x_n \in \mathbb{R}$$

- Παράδειγμα: Δίδεται ο γενικός όρος

$$x_n = \frac{1}{n(n+1)} \equiv \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \ldots\right)$$

- Παράδειγμα: Αναδρομική σχέση

$$x_1 = 1,\ x_n = \frac{n}{2} x_{n-1} \rightsquigarrow x_n = \frac{n!}{2^{n-1}}$$

- Παράδειγμα: Αναδρομική σχέση Fibonacci

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1\ x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$$

▷ Παράδειγμα: Εναλλασσομένη ακολουθία

$$x_n = \begin{cases} -1 & \text{γιά } n = 2k \\ \\ 1 & \text{γιά } n = 2k+1 \end{cases} \quad \rightsquigarrow$$

$$x_n = (-1)^{n+1} = -\cos n\pi$$

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$$

▷ Παράδειγμα:

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{γιά } n = 2k \\ \\ \frac{n-1}{n} & \text{γιά } n = 2k+1 \end{cases}$$

$$x_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1+(-1)^n}{2} + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1-(-1)^n}{2}$$

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{1}{2k}, \frac{2k}{2k+1}, \ldots\right)$$

Οριακό Σημείο Ακολουθίας

Οριακό Σημείο

x = $\boxed{\textbf{οριακό}}$ **σημείο** της $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\equiv$ Το x είναι σημείο συσσώρευσης της $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **ή** Υπάρχουν άπειροι όροι $= x$

▷ Παράδειγμα: Ακολουθία με γενικό όρο

$$x_n = \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} + \frac{(n+1)\cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\left(1, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{4}, \frac{1}{5}, \frac{7}{6}, \frac{1}{7}, \ldots\right)$$

οριακά σημεία 0 και 1

▷ Παράδειγμα: Ακολουθία με γενικό όρο

$$x_n = 1 + \frac{(n+1)\cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\left(1, \frac{5}{2}, 1, \frac{9}{4}, 1, \frac{13}{6}, 1, \ldots\right)$$

οριακά σημεία 2 και 1