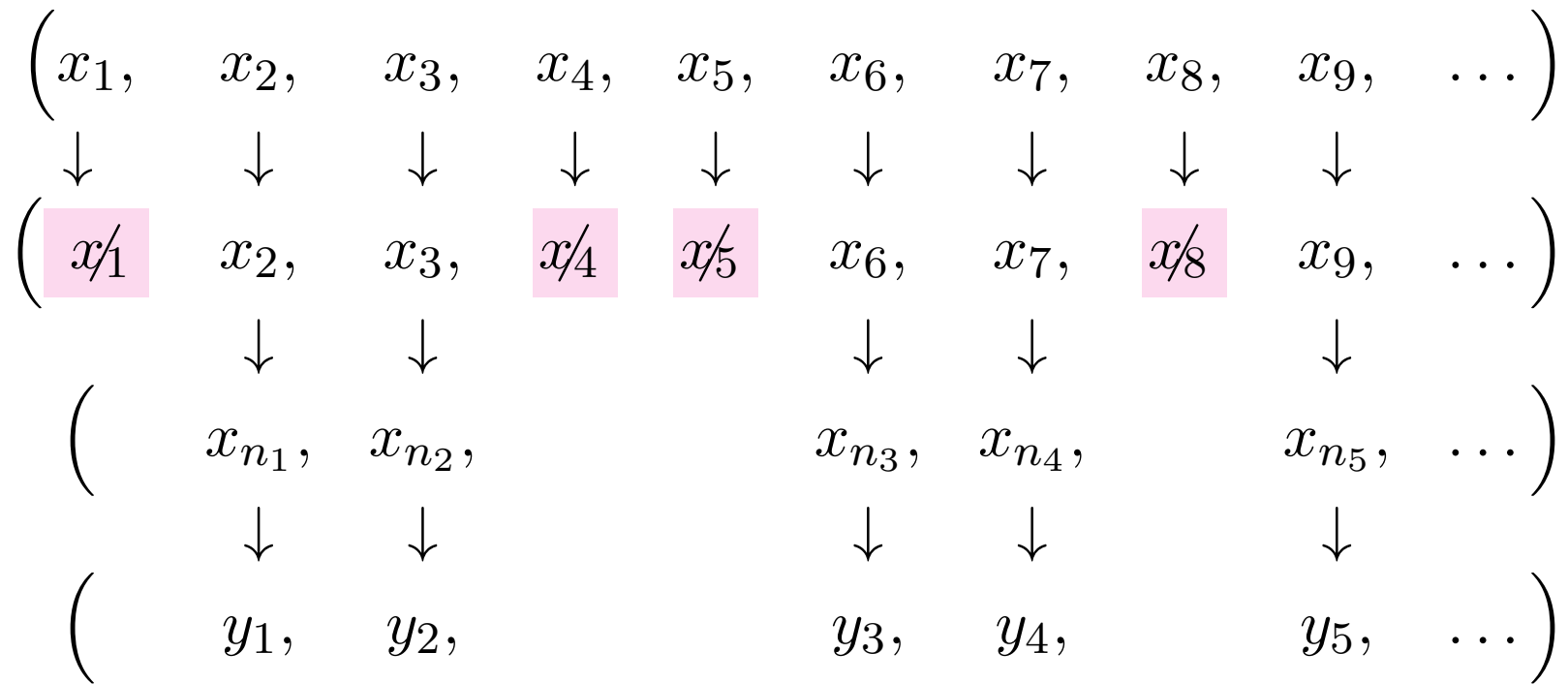


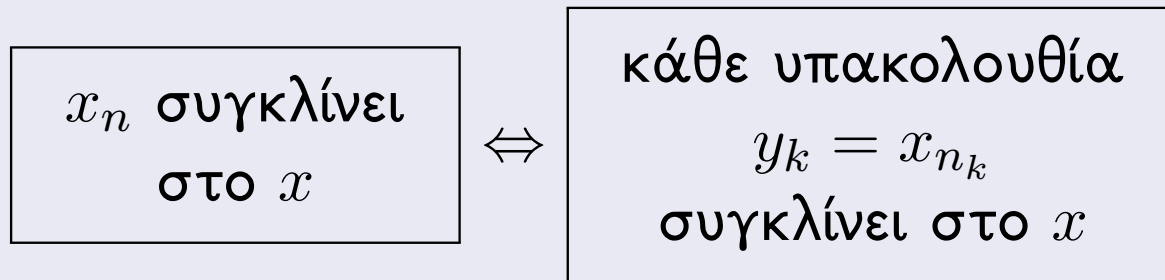
Ορισμός

Μια επιλογή $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ από **άπειρους** όρους της ακολουθίας, με $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ ονομάζεται **υπακολουθία** της $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$



Σημείωση για τους δείκτες: $k \leq n_k$ και $k < l \rightsquigarrow n_k < n_l$

Υπακ.1:



Παράδειγμα: $\{ \sqrt[n]{n} \rightarrow 1 \} \rightsquigarrow \{ \sqrt[n^2]{n^2} \rightarrow 1 \}$

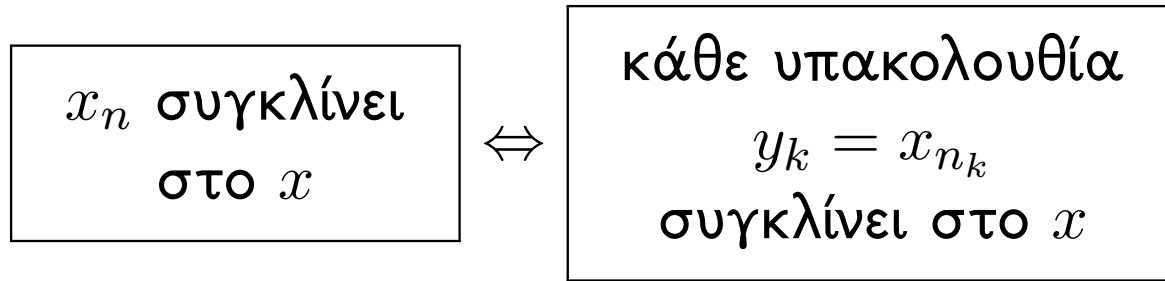
Θεώρημα Bolzano Weierstrass

Κάθε (άνω και κάτω) φραγμένο απειροσύνολο A έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης

Υπακ. 2:

Κάθε (άνω και κάτω) φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μια συγκλίνουσα υπακολουθία

Υπακ.1:



Παράδειγμα: $\{\sqrt[n]{n} \rightarrow 1\} \rightsquigarrow \{\sqrt[n^2]{n^2} \rightarrow 1\}$

□ Απόδ:

$$\left\{ x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) > 0 : \\ k > N(\epsilon) \rightsquigarrow |x_k - x| < \epsilon \end{array} \right\}$$

Επειδή $n_k \geq k > N(\epsilon)$ τότε $|x_{n_k} - x| < \epsilon$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) > 0 : \\ n_k > N(\epsilon) \rightsquigarrow |x_{n_k} - x| < \epsilon \end{array} \right\} \Rightarrow$$

□

Θεώρημα

Bolzano

Weierstrass

Κάθε (άνω και κάτω) φραγμένο απειροσύνολο A έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης



Υπ. 2

Κάθε (άνω και κάτω) φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μια συγκλίνουσα υπακολουθία

□ Απόδ:

► Αν η ακολουθία έχει μια απειρία από σταθερούς όρους τότε διαλέγουμε την υπακολουθία από τους σταθερούς όρους και είναι συγκλίνουσα

► αν η ακολουθία έχει άπειρους μη ίσους όρους τότε έχουμε ένα φραγμένο απειροσύνολο \Rightarrow υπάρχει ένα σημείο συσσώρευσης $x \Rightarrow$

$$\exists n \in \mathbb{N}, \exists x_{k_n} : x - \frac{1}{n} < x_{k_n} < x + \frac{1}{n}$$

Αρα $x_{k_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$.

□

ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

x_n είναι **αύξουσα ακολουθία** $\Leftrightarrow x_n \leq x_{n+1}$

x_n είναι **φθίνουσα ακολουθία** $\Leftrightarrow x_n \geq x_{n+1}$

x_n είναι **μονότονη ακολουθία** \Leftrightarrow φθίνουσα ή αύξουσα ακολουθία

Μον. 1α

x_n είναι αύξουσα και φραγμένη ακολουθία $\Rightarrow x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sup\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$

Μον. 1β

x_n είναι φθίνουσα και φραγμένη ακολουθία $\Rightarrow x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \inf\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$

Μον. 2

x_n είναι μονότονη ακολουθία και έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία

$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x \Rightarrow$ η ακολουθία x_n συγκλίνει στο ίδιο όριο δηλ $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$

ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ- αποδείξεις

x_n είναι αύξουσα ακολουθία $\Leftrightarrow x_n \leq x_{n+1}$

x_n είναι φθίνουσα ακολουθία $\Leftrightarrow x_n \geq x_{n+1}$

x_n είναι μονότονη ακολουθία \Leftrightarrow φθίνουσα ή αύξουσα ακολουθία

Μον. 1α

x_n είναι αύξουσα και φραγμένη ακολουθία $\Rightarrow x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \sup\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$

□ Απόδ: Έχουμε $x_n \leq x_{n+1} \leq K$. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις, είτε υπάρχει κάποιος δείκτης ℓ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq \ell \rightsquigarrow x_n = L \in \mathbb{R}$, στην περίπτωση αυτή

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \max\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$$

είτε η ακολουθία έχει απειρους διαφορετικούς όρους. Εστω $\mathbb{R} \ni M = \sup\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ (υπάρχει το M λόγω του αξιώματος III του συνόλου \mathbb{R} !) τότε από τον ορισμό του \sup

$$\forall \epsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N} : M - \epsilon < x_k \leq M$$

$$x_n \text{ αύξουσα} \Rightarrow \forall n > k \rightsquigarrow x_k \leq x_n \leq M < M + \epsilon \Rightarrow$$

Επομένως

$$\forall \epsilon > 0, \exists k = N(\epsilon) : n > N(\epsilon) \rightsquigarrow M - \epsilon < x_n < M + \epsilon$$

άρα $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} M$

□

Μον. 1β

x_n είναι φθίνουσα και φραγμένη ακολουθία $\Rightarrow x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \inf\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$

Μον. 2

x_n είναι μονότονη ακολουθία και έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία

$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x \Rightarrow$ η ακολουθία x_n συγκλίνει στο ίδιο όριο δηλ $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$

Απόδειξη.

Η υπακολουθία x_{n_k} είναι μια μονότονη (πχ αύξουσα) ακολουθία, επομένως $x = \sup_{k \in \mathbb{N}} \{x_{n_k}\}$. Το x είναι επίσης supremum της

υπαακολουθίας x_{n_k} (βλ. Μον. 1α). Θέτουμε $A = \{x_{n_k}, k \in \mathbb{N}\}$ και $B = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, $\forall z \in A \rightsquigarrow z \in B$ επομένως $z \leq \sup B$ δηλαδή $x = \sup A \leq \sup B$. Αν $\sup A < \sup B \rightsquigarrow \exists \ell : x_\ell > x$ αλλά τότε υπάρχει κάποιο m έτσι ώστε $x_{n_m} \geq x_\ell > x$ πράγμα άτοπο. Οπότε $\sup A = \sup B$. □