ΥΠΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Ορισμός

Μια επιλογή $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ από $\boxed{\text{άπειρους}}$ όρους της ακολουθίας, με $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ ονομάζεται $\boxed{\text{υπακολουθία}}$ της $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$
\begin{array}{cccccccccc}
\big(x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & x_8, & x_9, & \ldots\big) \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\big(\cancel{x_1} & x_2, & x_3, & \cancel{x_4} & \cancel{x_5} & x_6, & x_7, & \cancel{x_8} & x_9, & \ldots\big) \\
 & \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
\big(& x_{n_1}, & x_{n_2}, & & & x_{n_3}, & x_{n_4}, & & x_{n_5}, & \ldots\big) \\
 & \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
\big(& y_1, & y_2, & & & y_3, & y_4, & & y_5, & \ldots\big)
\end{array}
$$

Σημείωση για τους δείκτες: $\boxed{k \leq n_k}$ και $\boxed{k < \ell \;\rightsquigarrow\; n_k < n_\ell}$

Υπακ.1:

$\boxed{x_n \text{ συγκλίνει στο } x}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\text{κάθε υπακολουθία } y_k = x_{n_k} \text{ συγκλίνει στο } x}$

Παράδειγμα: $\{\sqrt[n]{n} \to 1\} \rightsquigarrow \left\{\sqrt[n^2]{n^2} \to 1\right\}$

Θεώρημα Bolzano Weierstrass

Κάθε (άνω και κάτω) φραγμένο απειροσύνολο A έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης

Υπακ. 2:

Κάθε (άνω και κάτω) φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μια συγκλίνουσα υπακολουθία

Υπακ.1:

$$\boxed{\begin{array}{c} x_n \text{ συγκλίνει} \\ \text{στο } x \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \text{κάθε υπακολουθία} \\ y_k = x_{n_k} \\ \text{συγκλίνει στο } x \end{array}}$$

Παράδειγμα: $\{ \sqrt[n]{n} \to 1\} \rightsquigarrow \left\{ \sqrt[n^2]{n^2} \to 1 \right\}$

$\square$ *Απόδ*:

$$\left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N(\epsilon) > 0\ : \\ k > N(\epsilon) \ \rightsquigarrow\ |x_k - x| < \epsilon \end{array} \right\}$$

Επειδή $n_k \geq k > N(\epsilon)$ τότε $|x_{n_k} - x| < \epsilon$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N(\epsilon) > 0\ : \\ n_k > N(\epsilon) \ \rightsquigarrow\ |x_{n_k} - x| < \epsilon \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\square$

Θεώρημα Bolzano Weierstrass

$$\boxed{\text{Κάθε (άνω και κάτω) φραγμένο απειροσύνολο } A \text{ έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης}}$$

$$\Downarrow$$

Υπ. 2

$$\boxed{\boxed{\text{Κάθε (άνω και κάτω) φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μια συγκλίνουσα υπακολουθία}}}$$

□ *Απόδ*:

▶ Αν η ακολουθία έχει μια απειρία από σταθερούς όρους τότε διαλέγουμε την υπακολουθία από τους σταθερούς όρους και είναι συκλίνουσα

▶ αν η ακολουθία έχει άπειρους μη ίσους όρους τότε έχουμε ένα φραγμένο απειροσύνολο $\Rightarrow$ υπάρχει ένα σημείο συσσώρευσης $x \Rightarrow$

$$\exists\, n \in \mathbb{N},\ \exists x_{k_n} \ :\ x - \frac{1}{n} < x_{k_n} < x + \frac{1}{n}$$

Αρα $x_{k_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x.$ □

ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

x_n είναι **αύξουσα ακολουθία** $\Leftrightarrow x_n \leq x_{n+1}$

x_n είναι **φθίνουσα ακολουθία** $\Leftrightarrow x_n \geq x_{n+1}$

x_n είναι **μονότονη ακολουθία** $\Leftrightarrow$ φθίνουσα ή αύξουσα ακολουθία

Μον. 1α

x_n είναι αύξουσα και φραγμένη ακολουθία $\Rightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sup\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

Μον. 1β

x_n είναι φθίνουσα και φραγμένη ακολουθία $\Rightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \inf\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$

Μον. 2

x_n είναι μονότονη ακολουθία και έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x \Rightarrow$ η ακολουθία x_n συγκλίνει στο ίδιο όριο δηλ $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$

ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ- αποδείξεις

x_n είναι $\boxed{\text{αύξουσα ακολουθία}} \Leftrightarrow x_n \leq x_{n+1}$

x_n είναι $\boxed{\text{φθίνουσα ακολουθία}} \Leftrightarrow x_n \geq x_{n+1}$

x_n είναι x_n είναι $\boxed{\text{μονότονη ακολουθία}} \Leftrightarrow$ φθίνουσα ή αύξουσα ακολουθία

Μον. 1α

x_n είναι αύξουσα και φραγμένη ακολουθία $\Rightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sup\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

□ *Απόδ*: Εχουμε $x_n \leq x_{n+1} \leq K$. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις,
είτε υπάρχει κάποιος δείκτης ℓ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq \ell \rightsquigarrow x_n = L \in \mathbb{R}$, στην περίπτωση αυτή

$$L = \lim_{k\to\infty} x_k = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$$

είτε η ακολουθία έχει απειρους διαφορετικούς όρους. Εστω $\mathbb{R} \ni M = \sup\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (υπάρχει το M λόγω του αξιώματος III του συνόλου $\mathbb{R}$!) τότε από τον ορισμό του $\sup$

$$\forall \epsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N} \,:\, M - \epsilon < x_k \leq M$$

$$x_n \;\text{ αύξουσα }\; \Rightarrow \forall n > k \rightsquigarrow x_k \leq x_n \leq M < M + \epsilon \Rightarrow$$

Επομένως

$$\forall \epsilon > 0, \exists k = N(\epsilon) \,:\, n > N(\epsilon) \rightsquigarrow M - \epsilon < x_n < M + \epsilon$$

άρα $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} M$ □

Μον. 1β

x_n είναι φθίνουσα και φραγμένη ακολουθία $\Rightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \inf\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$

Μον. 2

x_n είναι μονότονη ακολουθία και έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \Rightarrow$ η ακολουθία x_n συγκλίνει στο ίδιο όριο δηλ $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

Απόδειξη.

Η υπακολουθία x_{n_k} είναι μια μονότονη (πχ αύξουσα) ακολουθία, επομένως $x = \sup_{k\in\mathbb{N}} \{x_{n_k}\}$. Το x είναι επίσης supremum της υπαακολουθίας x_{n_k} (βλ. Μον. 1α). Θέτουμε $A = \{x_{n_k},\ k \in \mathbb{N}\}$ και $B = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, $\forall\, z \in A \ \rightsquigarrow\ z \in B$ επομένως $z \leq \sup\ B$ δηλαδή $x = \sup\ A \leq \sup\ B$. Αν $\sup\ A < \sup\ B \rightsquigarrow \exists \ell\ :\ x_\ell > x$ αλλά τότε υπάρχει κάποιο m έτσι ώστε $x_{n_m} \geq x_\ell > x$ πράγμα άτοπο. Οπότε $\sup\ A = \sup\ B$. $\square$