Παράγωγος Συνάρτησης

Ορισμός Παραγώγου σε ένα σημείο

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ σε ένα σημείο ξ είναι το όριο (αν υπάρχει!)

$$\boxed{f'(\xi) = \lim_{x\to\xi} g(x,\xi), \quad g(x,\xi) = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}$$

- Ορισμός *Cauchy*:

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \delta(\epsilon,\xi) > 0\, \forall\, x\ |x-\xi| < \delta \ \Rightarrow\ |f'(\xi) - g(x,\xi)| < \epsilon$$

- Ορισμός $\mathfrak{Heine}$:

$$\forall\, x_n \to \xi \ \Rightarrow\ g(x_n,\xi) \to f'(\xi)$$

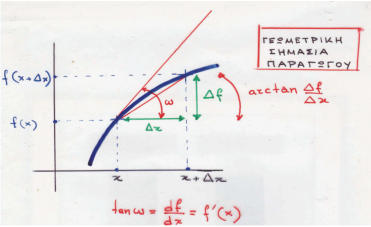
$$\exists\, f'(x) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Παράγωγος από αριστερά} = \\ = \text{Παράγωγος από δεξιά} \end{array} \right\}$$

$$\lim_{x\to\xi-} g(x,\xi) \equiv f'_-(\xi) = f'_+(\xi) \equiv \lim_{x\to\xi+} g(x,\xi)$$

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΟΙ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\left(\begin{array}{c}\text{όπου } \Delta f(x) = \\ = f(x+\Delta x)-f(x)\end{array}\right) = \boxed{\frac{df}{dx}}$$



$$\boxed{\frac{df}{dx} = \lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n - x}}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}$$

Πρόταση

Αν υπάρχει το $f'(\xi)$ τότε η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο ξ

Απόδειξη.

$$f(x) - f(\xi) = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}(x - \xi) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \lim_{x \to \xi} (f(x) - f(\xi)) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \lim_{x \to \xi} (x - \xi) = 0$$

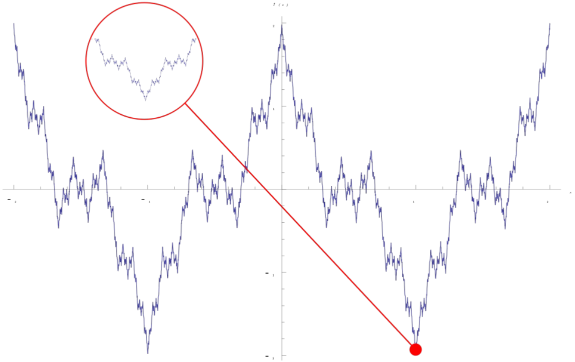
$\square$

- Προσοχή: Το αντίστροφο δεν ισχύει. Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής σε κάθε περιοχή γύρω από το $x = 0$ αλλά δεν έχει παράγωγο στο $x = 0$
- Υπάρχουν συναρτήσεις παντού συνεχείς αλλά δεν έχουν πουθενά παράγωγο ! πχ η συνάρτηση Weierstrass

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(17^n x)}{2^n}$$

Υπάρχουν συναρτήσεις παντού συνεχείς αλλά δεν έχουν πουθενά παράγωγο ! πχ η συνάρτηση Weierstrass

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(17^n x)}{2^n}$$



'fractal' δομή της καμπύλης.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

1. $(\mu f)'(x) = \mu f'(x)$ **για** $\mu \in \mathbb{R}$
2. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
3. $(f\, g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ Leibnitz rule
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
5. $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$ Chain rule
   ή $\dfrac{d}{dx} f(g(x)) = \dfrac{df}{dg}\,\dfrac{dg}{dx}$
6. $f(x)$ γνήσια μονότονη συνάρτηση, $f'(x) \neq 0$
   $$\left.\begin{array}{c} f(\xi) = \eta \\ \xi = f^{-1}(\eta) \end{array}\right\} \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(\eta) = 1/f'(\xi)$$
   ή $\frac{df^{-1}(\eta)}{d\eta} = \frac{d\xi}{d\eta} = \frac{1}{d\eta/d\xi} = \frac{1}{df(\xi)/d\xi}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ- Αποδείξεις

1. $(\mu f)'(x) = \mu f'(x) \quad$ για $\quad \mu \in \mathbb{R}$
2. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
3. $(f\,g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ Leibnitz rule

   ☐ *Απόδ* ($\mathfrak{Heine}$):

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_n)g(x_n)}{x - x_n} = f(x)\frac{g(x)-g(x_n)}{x-x_n} + g(x_n)\frac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}$$

   Παίρνουμε το όριο $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ ☐

4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
5. $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x) \quad$ Chain rule

   ή $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{df}{dg}\,\dfrac{dg}{dx}$

   ☐ *Απόδ* ($\mathfrak{Heine}$):

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_n))}{x - x_n} == \frac{f(g(x)) - f(g(x_n))}{g(x) - g(x_n)} \cdot \frac{g(x)-g(x_n)}{x-x_n} = \frac{f(g) - f(g)}{g - g_n} \cdot \frac{g(x)-g(x_n)}{x-x_n}$$

   Παίρνουμε το όριο $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \rightsquigarrow g_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$ ☐

6. $f(x)$ γνήσια μονότονη συνάρτηση, $f'(x) \neq 0$

$$\left.\begin{array}{c} f(\xi) = \eta \\ \xi = f^{-1}(\eta) \end{array}\right\} \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(\eta) = 1/f'(\xi)$$

   ή $\quad \frac{df^{-1}(\eta)}{d\eta} = \frac{d\xi}{d\eta} = \frac{1}{d\eta/d\xi} = \frac{1}{df(\xi)/d\xi}$

   ☐ *Απόδ* ($\mathfrak{Heine}$):

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi \leftrightsquigarrow f(x_n) = y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \eta = f(\xi)$$

$$y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \eta \leftrightsquigarrow f^{-1}(y_n) = x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi = f^{-1}(\eta)$$

$$\frac{f^{-1}(\eta) - f^{-1}(y_n)}{\eta - y_n} = \frac{\xi - x_n}{f(\xi) - f(x_n)} = \frac{1}{\dfrac{f(\xi)-f(x_n)}{\xi - x_n}}$$

   Παίρνουμε το όριο $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi \rightsquigarrow y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \eta$ ☐

Παραγωγίσεις Παραμετρικών μορφών συναρτήσεων

Μια καμπύλη περιγράφεται είναι με μια συνάρτηση $y = f(x)$ είτε με μια παραμετρική συνάρτηση των συντεταγμένων πχ.

$$x = X(t), \quad y = Y(t)$$

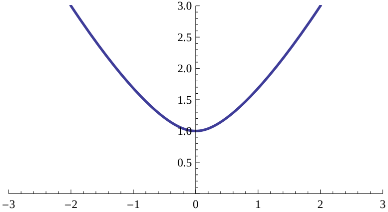
Θέτουμε $y = f(x)$ και $y' = f(x')$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}} = \lim_{x' \to x} \frac{y' - y}{x' - x} = \lim_{t' \to t} \frac{\frac{y'-y}{t'-t}}{\frac{x'-x}{t'-t}} = \frac{\lim\limits_{t' \to t} \frac{y'-y}{t'-t}}{\lim\limits_{t' \to t} \frac{x'-x}{t'-t}} = \boxed{\frac{dy/dt}{dx/dt}}$$

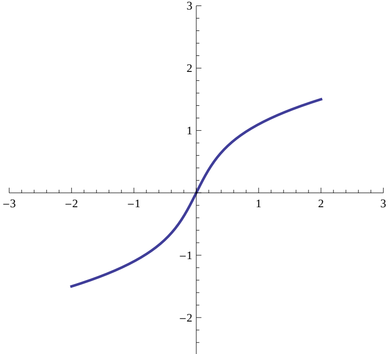
$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \boxed{\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)}{\frac{dx}{dt}}}$$

Παράδειγμα

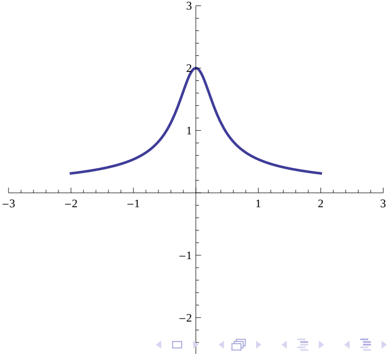
$$\left\{x = t^3 + t, \quad y = t^4 + t^2 + 1, \quad -1 < t < 1\right\}$$



$$\left\{x = t^3 + t, \ \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{4t^3 + 2t}{3t^2 + 1}, \quad -1 < t < 1\right\}$$

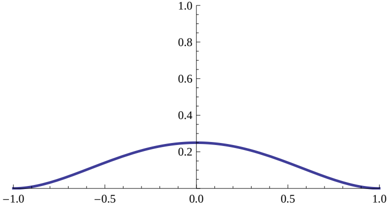


$$\left\{x = t^3 + t, \ \frac{d^2 y}{\mathrm{dx}^2} = \frac{\frac{12t^2+2}{3t^2+1} - \frac{6t(4t^3+2t)}{(3t^2+1)^2}}{3t^2 + 1}, \quad -1 < t < 1\right\}$$

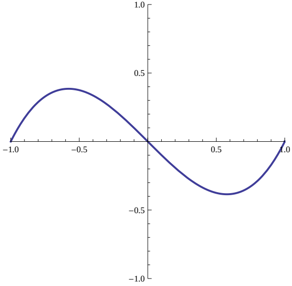


Παράδειγμα

$$\left\{x = \sin(t), \quad y = \frac{\cos^4(t)}{4}, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right\}$$

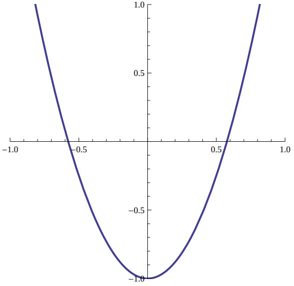


$$\left\{x = \sin(t), \ \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \sin(t)\left(-\cos^2(t)\right), \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right\}$$



,

$$\left\{x = \sin(t), \ \frac{d^2 y}{\mathrm{dx}^2} = 2\sin^2(t) - \cos^2(t), \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right\}$$



$$\boxed{\mathrm{e}^x \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

για $\boxed{0 \le y < x < \infty}$

$$\rightsquigarrow \boxed{(x-y)\mathrm{e}^y < \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y < (x-y)\mathrm{e}^x}$$

$$\rightsquigarrow \mathrm{e}^y < \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y}{x-y} < \mathrm{e}^x$$

$$\Rightarrow (\mathrm{e}^x)'_- = \lim_{y \to x^-} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y}{x-y} = \mathrm{e}^x$$

$$x \leftrightarrow y \rightsquigarrow (\mathrm{e}^x)'_+ = \mathrm{e}^x$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\,\mathrm{e}^x}{dx} = \mathrm{e}^x}$$

$$\rightsquigarrow (x-y)\mathrm{e}^y < \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y < (x-y)\mathrm{e}^x$$

$$\rightsquigarrow \boxed{(x-y)\mathrm{e}^{-x} < \mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{-x} < (x-y)\mathrm{e}^{-y}}$$

$$x > 0\,, y = \ln\ x = \exp^{-1} x \xleftrightarrow{1:1} x = \exp\ y = e^{y},\ \ y > 0$$

$$\frac{d}{dx}(\ln\ x) = \frac{d \exp^{-1} x}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln\ x)} = \lim_{x' \to x} \frac{\ln\ x - \ln\ x'}{x - x'} =$$

$$= \lim_{y' \to y} \frac{y - y'}{\exp\ y - \exp\ y'} =$$

$$= \lim_{y' \to y} \frac{1}{\frac{\exp\ y - \exp\ y'}{y - y'}} = \boxed{\frac{1}{\frac{d}{dy}(\exp\ y)}} = \frac{1}{\exp\ y} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{x}}$$

Παράδειγμα $|x| \leq 1$

$$y = \arcsin\, x = \sin^{-1} x \overset{1:1}{\longleftrightarrow} x = \sin\, y, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d}{dx}(\arcsin\, x) = \frac{d \sin^{-1} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\arcsin\, x)} = \lim_{x' \to x} \frac{\arcsin\, x - \arcsin\, x'}{x - x'} =$$

$$= \lim_{y' \to y} \frac{y - y'}{\sin\, y - \sin\, y'} =$$

$$= \lim_{y' \to y} \frac{1}{\frac{\sin\, y - \sin\, y'}{y - y'}} = \boxed{\frac{1}{\frac{d}{dy}(\sin\, y)}} =$$

$$= \frac{1}{\cos\, y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

Παράδειγμα $|x| \leq \infty$

$$y = \arctan\ x = \tan^{-1} x \overset{1:1}{\longleftrightarrow} x = \tan\ y,\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d}{dx}(\arctan\ x) = \frac{d\tan^{-1} x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\arctan\ x)} = \lim_{x' \to x} \frac{\arctan\ x - \arctan\ x'}{x - x'} =$$

$$= \lim_{y' \to y} \frac{y - y'}{\tan\ y - \sin\ y'} =$$

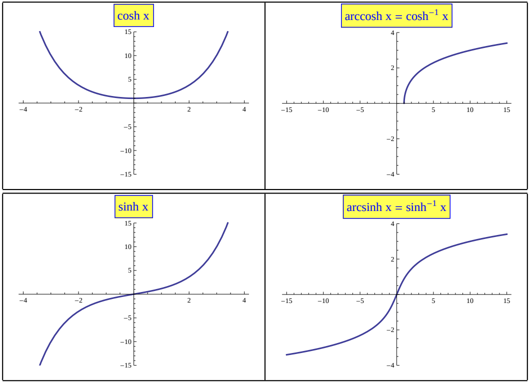
$$= \lim_{y' \to y} \frac{1}{\frac{\tan\ y - \tan\ y'}{y - y'}} = \boxed{\frac{1}{\frac{d}{dy}(\tan\ y)}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2\ y}} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \boxed{\frac{1}{1+x^2}}$$

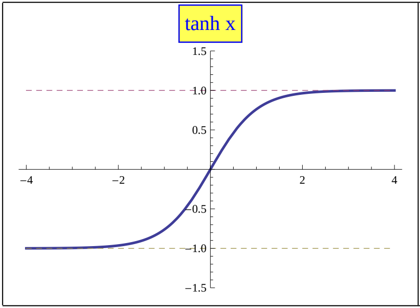
ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

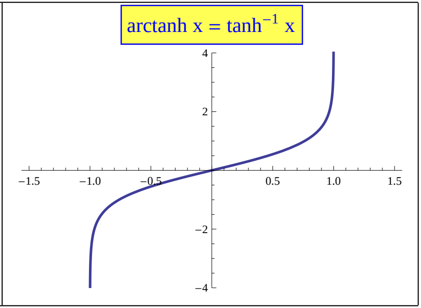
$$\cosh\, x \equiv \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \sinh\, x \equiv \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$



$$\tanh x \equiv \frac{\sinh x}{\cosh x}$$





$$\frac{d\cosh\ x}{dx} = \sinh\ x, \quad \frac{d\sinh\ x}{dx} = \cosh\ x$$

$$\frac{d\cosh^{-1}\ x}{dx} = \frac{d\,\mathrm{arccosh}\,x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d\sinh^{-1}\ x}{dx} = \frac{d\,\mathrm{arcsinh}\,x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{d\tanh\ x}{dx} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\frac{d\tanh^{-1} x}{dx} = \frac{d\,\mathrm{arctanh}\,x}{dx} = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| < 1$$

$$\frac{d\coth\ x}{dx} = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$

$$\frac{d\coth^{-1} x}{dx} = \frac{d\,\mathrm{arccoth}\,x}{dx} = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| >$$

ΤΥΠΟΣ *NEWTON*

$$\boxed{(x+y)^n \ = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k}}$$

ΤΥΠΟΣ *LEIBNITZ*

$$\boxed{(f\,g)^{(n)} \ = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}\, g^{(n-k)}}$$

Θεώρημα εσωτερικών ακραίων τιμών/Interior Extremum Theorem

Πρόταση

$$f:\,[a,\,b]\longrightarrow\mathbb{R}\quad\text{και}\quad\forall c\in(a,\,b)\quad\exists\, f'(c)\,\text{αν}\quad f'(c)>0\;\Rightarrow$$
$$\exists\,\delta>0\;:c<x<c+\delta\;\rightsquigarrow\;f(c)<f(x)$$
$$\text{και}\;\;c-\delta<x'<c\;\rightsquigarrow\;f(x')<f(c)$$

$f'(c)>0 \;\rightsquigarrow\;$ η $f(x)$ είναι τοπικά αύξουσα

$f'(c)<0 \;\rightsquigarrow\;$ η $f(x)$ είναι τοπικά φθίνουσα

Θεώρημα εσωτερικών ακραίων τιμών/Interior Extremum Theorem

$$f(x)\;\text{παραγωγίσιμη στο}\;[a,\,b]\Rightarrow f(x)\;\text{συνεχής στο}\;[a,\,b]$$
$$\Downarrow$$
$$\exists\,x_m\in[a,\,b]\;:\;f(x_m)=\min_{x\in[a,\,b]}f(x)\Rightarrow\boxed{\text{Αν}\;x_m\in(a,\,b)\rightsquigarrow f'(x_m)=0}$$
$$\text{και}$$
$$\exists\,x_M\in[a,\,b]\;:\;f(x_M)=\max_{x\in[a,\,b]}f(x)\Rightarrow\boxed{\text{Αν}\;x_M\in(a,\,b)\rightsquigarrow f'(x_M)=0}$$

Πρόταση

Θεώρημα εσωτερικών ακραίων τιμών/Interior Extremum Theorem-Αποδείξεις

$$f : [a,\, b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \forall c \in (a,\, b) \quad \exists\, f'(c)$$
$$\text{αν} \quad f'(c) > 0 \ \Rightarrow$$
$$\exists\, \delta > 0 \ : c < x < c + \delta \ \rightsquigarrow \ f(c) < f(x)$$
$$\text{και} \ \ c - \delta < x' < c \ \rightsquigarrow \ f(x') < f(c)$$

Απόδειξη.

$$g(x,\, c) = \frac{f(c) - f(x)}{c - x}$$
$$f'(c) > 0 \ \rightsquigarrow \ \lim_{x \to c} g(x, c) \ = f'(c) \ \rightsquigarrow$$
$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \ :$$
$$c - \delta < x < c + \delta \rightsquigarrow \ f'(c) - \epsilon < g(x, c) < f'(c) + \epsilon$$
$$\text{Αν } \epsilon < f'(c) \ (\text{ πχ } \ \epsilon = \frac{f'(c)}{10}) \ \rightsquigarrow \ 0 < g(x, c)$$

Αν $c < x < c + \delta \ \rightsquigarrow$

$$0 < \frac{f(c) - f(x)}{c - x} \ \rightsquigarrow \ f(c) - f(x) < 0$$

Αν $c - \delta < x < c \ \rightsquigarrow$

$$0 < \frac{f(c) - f(x)}{c - x} \ \rightsquigarrow \ f(c) - f(x) > 0$$

□

$f'(c) > 0 \ \rightsquigarrow$ η $f(x)$ είναι τοπικά αύξουσα
$f'(c) < 0 \ \rightsquigarrow$ η $f(x)$ είναι τοπικά φθίνουσα

Θεώρημα εσωτερικών ακραίων τιμών/Interior Extremum Theorem

$$f(x) \text{ παραγωγίσιμη στο } [a,\, b]$$
$$\Downarrow$$
$$f(x) \text{ συνεχής στο } [a,\, b]$$
$$\Downarrow$$
$$\exists\, x_m \in [a,\, b] \ : \ f(x_m) = \min_{x \in [a,\, b]} f(x)$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Αν } x_m \in (a,\, b) \rightsquigarrow f'(x_m) = 0}$$
$$\text{και}$$
$$\exists\, x_M \in [a,\, b] \ : \ f(x_M) = \max_{x \in [a,\, b]} f(x)$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Αν } x_M \in (a,\, b) \rightsquigarrow f'(x_M) = 0}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ DARBOUX ή Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών για παραγώγους

$$f : [a,\, b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \textbf{και} \quad \forall x \in [a,\, b] \rightsquigarrow \exists\, f'(x)$$

$$\textbf{και} \quad f'(a) < f'(b) \;\; (\text{ή } f'(a) > f'(b))$$

$$\textbf{αν} \quad f'(a) < k < f'(b) \;\; \big(\text{ή } f'(a) > k > f'(b)\big) \;\Rightarrow\; \exists\, \xi \in (a,\, b) : f'(\xi) = k$$

ΘΕΩΡΗΜΑ DARBOUX-Απόδειξη

ΘΕΩΡΗΜΑ DARBOUX ή Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών για παραγώγους

$$f : [a,\, b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \forall x \in (a,\, b) \ \rightsquigarrow \ \exists\, f'(x)$$
$$\text{και} \quad f'(a) < f'(b) \ \ (\text{ή } f'(a) > f'(b))$$
$$\text{αν} \quad f'(a) < k < f'(b) \ \ \big(\text{ή } f'(a) > k > f'(b)\big) \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ \exists \xi \in (a,\, b) : f'(\xi) = k$$

Απόδειξη.

$f'(a) < k < f'(b)$, $g(x) = f(x) - kx$

$$g'(a) = f'(a) - k < 0 \rightsquigarrow$$
$$\exists\ \delta_1 > 0 \ : a < x < a + \delta_1 \ \rightsquigarrow \ g(x) < g(a)$$
$$g'(b) = f'(b) - k > 0 \rightsquigarrow$$
$$\exists\ \delta_2 > 0 \ : b - \delta_2 < x < b \ \rightsquigarrow \ g(x) < g(b)$$

$f(x)$ **συνεχής** $\rightsquigarrow \exists \xi \in (a,\, b)$:

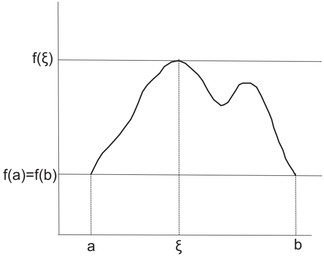
$$g(\xi) = \min \Big\{ g(x),\ x \in [a,\, b] \Big\} \ \rightsquigarrow \ g'(\xi) = 0$$
$$\rightsquigarrow \ f'(\xi) = k$$

Σημ. Το ξ δεν μπορεί να είναι το a είτε το b. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

$$\left\{\begin{array}{l} f\,:\,[a,\,b]\longrightarrow\mathbb{R}\quad \text{συνεχής} \\ \boxed{\text{και}}\quad \forall x\in(a,\,b)\quad \exists\, f'(x) \\ \qquad\boxed{\text{και}}\quad f(a)=f(b) \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\exists\,\xi\in(a,\,b)\;:\;f'(\xi)=0\right\}$$



Μεταξύ δύο (διαδοχικών) ριζών μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης υπάρχει μια ρίζα της παραγώγου

Από τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle <u>καμμιά δεν</u> μπορεί να παραληφθεί

$f(x)$ συνεχής , $f(0)=f(1)$ αλλά $\boxed{\text{μη}}$ παραγωγίσιμη σε κάποιο σημείο π.χ

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{αν} \quad 0\le x<\frac{1}{2} \\ \\ 1-x & \text{αν} \quad \frac{1}{2}\le x\le 1 \end{cases} \qquad \text{ΟΧΙ} \quad f'(\xi)=0$$

$f(x)$ $\boxed{\text{μη}}$ συνεχής σε κάποιο σημείο, $f(0)=f(1)$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ π.χ

$$f(x)=x-[x] \;\Rightarrow\; f(x)=\begin{cases} x, & \text{αν} \quad 0\le x<1 \\ \\ 0 & \text{αν} \quad x=1 \end{cases}$$

$f'(x)=1$ για $x\in(0,1)$

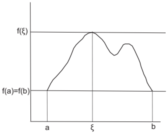
$f(x)$ συνεχής και παραγωγίσιμη αλλά $\boxed{f(1)\neq f(2)}$ πχ

$$f(x)=x^2, \quad x\in[1,2] \quad \text{ΟΧΙ} \quad f'(\xi)=0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE-Απόδειξη

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

$$\left\{\begin{array}{l} f:\,[a,\,b]\longrightarrow\mathbb{R}\quad \textbf{συνεχής} \\ \boxed{\textbf{και}}\quad \forall x\in(a,\,b)\quad \exists\, f'(x) \\ \qquad \boxed{\textbf{και}}\quad f(a)=f(b) \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\exists\,\xi\in(a,\,b)\ :\ f'(\xi)=0\right\}$$



Απόδειξη.

☐ *Απόδ*:

$$f(x)\ \textbf{συνεχής}\ \rightsquigarrow$$

$$\exists\, x_m\in[a,\,b]\ \rightsquigarrow m=f(x_m)=\min\left\{f(x),\ x\in[a,\,b]\right\}$$

$$\exists\, x_M\in[a,\,b]\ \rightsquigarrow M=f(x_M)=\max\left\{f(x),\ x\in[a,\,b]\right\}$$

<u>Περίπτωση 1</u>: $m=M\rightsquigarrow f(x)=$σταθερά $\rightsquigarrow f'(x)=0$
<u>Περίπτωση 2α</u>: $m<M$ Αν $x_M\neq a$ και $x_M\neq b$ τότε

$$\exists\,\xi=x_M\in(a,\,b)\ \rightsquigarrow\ f'(\xi)=0$$

<u>Περίπτωση 2β</u>: $m<M$ Αν $x_M=a$ (ή $x_M=b$) τότε $f(a)=f(b)=M$

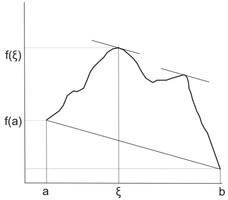
$$\exists\,\xi=x_m\in(a,\,b)\ \rightsquigarrow\ f'(\xi)=0$$

☐

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ- ΓΕΝΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

$$\left.\begin{array}{lll} f:[a,\,b] \longrightarrow \mathbb{R} & & \text{συνεχής} \\ \text{και} & \forall\, x \in (a,\,b) & \exists\, f'(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \exists \xi \in (a,\,b)\ :\ f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right.$$



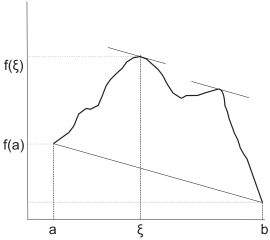
ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

$$\left\{\begin{array}{lll} f:[a,\,b] \longrightarrow \mathbb{R} & & \text{συνεχής} \\ \text{και} & \forall\, x \in (a,\,b) & \exists\, f'(x) \\ g:[a,\,b] \longrightarrow \mathbb{R} & & \text{συνεχής} \\ \text{και} & \forall\, x \in (a,\,b) & \exists\, g'(x) \\ & \text{και} \quad g(a) \neq g(b) & \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \xi \in (a,\,b)\ :\ \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ- Απόδειξη

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

$$\left\{ \begin{array}{lll} f : [a, b] & \longrightarrow \mathbb{R} & \text{συνεχής} \\ \text{και} & \forall x \in (a, b) & \exists f'(x) \end{array} \right\}$$
$$\Downarrow$$
$$\exists \xi \in (a, b) \ : \ f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Απόδειξη.

$$h(x) = x\,(f(b) - f(a)) - f(x)\,(b - a)$$
$$h(a) = a\,(f(b) - f(a)) - f(a)\,(b - a) = af(b) - bf(a)$$
$$h(b) = b\,(f(b) - f(a)) - f(b)\,(b - a) = af(b) - bf(a)$$
$$\rightsquigarrow \ h(a) = h(b)$$
$$h'(x) = (f(b) - f(a)) - f'(x)\,(b - a)$$

Η συνάρτηση $h(x)$ είναι συνεχής για $x \in [a, b]$ και $\exists f'(x)$ για $x \in (a, b)$

$\overset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow} \exists \xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ □

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ-Απόδειξη

$$\left\{ \begin{array}{l} f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{συνεχής} \\ \text{και} \quad \forall x \in (a, b) \quad \exists f'(x) \\ g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{συνεχής} \\ \text{και} \quad \forall x \in (a, b) \quad \exists g'(x) \\ \text{και} \quad g(a) \neq g(b) \end{array} \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \xi \in (a, b) : \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Απόδειξη.

$$\begin{gathered} h(x) = g(x)\,(f(b) - f(a)) - f(x)\,(g(b) - g(a)) \\ h(a) = g(a)\,(f(b) - f(a)) - f(a)\,(g(b) - g(a)) = \\ = g(a)f(b) - g(b)f(a) \\ h(b) = g(b)\,(f(b) - f(a)) - f(b)\,(g(b) - g(a)) = \\ = g(a)f(b) - g(b)f(a) \\ \rightsquigarrow \; h(a) = h(b) \\ h'(x) = g'(x)\,(f(b) - f(a)) - f'(x)\,(g(b) - g(a)) \end{gathered}$$

Η συνάρτηση $h(x)$ είναι συνεχής για $x \in [a, b]$ και $\exists f'(x)$ για $x \in (a, b)$
$\overset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow} \exists \xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ □ □

Εφαρμογές Θεωρήματος Μέσης Τιμής

$f(x)$ είναι συνεχής στο $[a,\ b]$ και $f'(x) = 0$ για $x \in (a,\ b)$. Τότε η συνάρτηση είναι σταθερά στο $[a,\ b]$.

$f(x)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x \in (a,\ b)$. Αν η $f'(x)$ δεν αλλάζει πρόσιμο τότε είναι μονότονη.

Αν $|f'(x)| < M$ τότε $|f(x) - f(y)| < M\,|x - y|$

ΚΑΝΟΝΕΣ de l' HOSPITAL

ΚΑΝΟΝΕΣ de l' HOSPITAL σε ένα σημείο για συναρτήσεις που μηδενίζονται

$f(x)$ και $g(x)$ συνεχείς συναρτήσεις και παραγωγίσιμες γιά $x \in (a, \xi)$

$$\lim_{x \to \xi^+} f(x) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \to \xi^+} g(x) = 0$$

$$\exists \lim_{x \to \xi^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x \to \xi^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \xi^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Απόδειξη.

Περίπτωση $\boxed{|\xi| < \infty}$

$$\left\{ \lim_{x \to \xi^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall, \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \ : \\ \xi < s < \xi + \delta \ \rightsquigarrow \ -\epsilon < \dfrac{f'(s)}{g'(s)} - \ell < \epsilon \end{array} \right\}$$

Γενικευμένο Θεωρ. Μ.Τ. $\rightsquigarrow$
Αν $\xi < y < x < \xi + \delta \Rightarrow \exists s \ : \ \xi < y < s < x < \xi + \delta$
$\dfrac{f'(s)}{g'(s)} = \dfrac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)}$ επομένως

$$-\epsilon < \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - \ell < \epsilon \ \rightsquigarrow$$

$$-\epsilon \leq \lim_{y \to \xi^+} \left(\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - \ell \right) = \frac{f(x)}{g(x)} - \ell \leq \epsilon$$

Δηλαδή αποδείξαμε ότι:

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall, \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \ : \\ \xi < x < \xi + \delta \ \rightsquigarrow \ -\epsilon \leq \dfrac{f(x)}{g(x)} - \ell \leq \epsilon \end{array} \right\} \rightsquigarrow$$

$$\lim_{x \to \xi^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

Περίπτωση $\boxed{\xi = -\infty}$ Ιδια απόδειξη, θέτουμε $\xi \to -\infty$ και $\xi + \delta \to -R$ □

ΚΑΝΟΝΕΣ de l' HOSPITAL σε ένα σημείο για συναρτήσεις που μηδενίζονται

$f(x)$ και $g(x)$ συνεχείς συναρτήσεις και παραγωγίσιμες γιά $x \in (a, \xi)$

$$\lim_{x \to \xi^-} f(x) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \to \xi^-} g(x) = 0$$

$$\exists \lim_{x \to \xi^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x \to \xi^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \xi^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Κανόνες de l'Hospital για απειρήσημες συναρτήσεις

Κανόνες de l'Hospital για απειρήσημες συναρτήσεις

$f(x)$ και $g(x)$ συνεχείς συναρτήσεις και παραγωγίσιμες γιά $x \in (\xi,\, b)$

$$\lim_{x \to \xi^+} g(x) = \pm\infty$$

$$\exists \lim_{x \to \xi^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x \to \xi^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \xi^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Απόδειξη.

Περίπτωση $\boxed{|\xi| < \infty}$

$$\left\{ \lim_{x \to \xi^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall, \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \ : \\ \xi < s < \xi + \delta \ \rightsquigarrow \ -\epsilon < \dfrac{f'(s)}{g'(s)} - \ell < \epsilon \end{array} \right\}$$

Γενικευμένο Θεωρ. Μ.Τ. $\rightsquigarrow$
Αν $\xi < y < x < \xi + \delta \Rightarrow \exists s \ : \ \xi < y < s < x < \xi + \delta$

$$\frac{f'(s)}{g'(s)} = \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{\frac{f(y)}{g(y)} - \frac{f(x)}{g(y)}}{1 - \frac{g(x)}{g(y)}}$$

$$\left\{ \lim_{x \to \xi^+} g(x) = \pm\infty \right\} \Rightarrow$$

$$\exists \delta_1 \ : \ \xi < y < \xi + \delta_1 \ \rightsquigarrow \ \frac{g(x)}{g(y)} < 1 \ \rightsquigarrow \ 0 < 1 - \frac{g(x)}{g(y)}$$

επομένως

$$\ell - \epsilon < \frac{\frac{f(y)}{g(y)} - \frac{f(x)}{g(y)}}{1 - \frac{g(x)}{g(y)}} < \ell + \epsilon \rightsquigarrow$$

$$(\ell - \epsilon)\left(1 - \frac{g(x)}{g(y)}\right) < \frac{f(y)}{g(y)} - \frac{f(x)}{g(y)} < (\ell + \epsilon)\left(1 - \frac{g(x)}{g(y)}\right)$$

$$\rightsquigarrow \ (\ell - \epsilon) + \underbrace{\frac{f(x)}{g(y)} - (\ell - \epsilon)\,\frac{g(x)}{g(y)}}_{K_L} < \frac{f(y)}{g(y)} <$$

$$(\ell + \epsilon) + \underbrace{\frac{f(x)}{g(y)} - (\ell + \epsilon)\,\frac{g(x)}{g(y)}}_{K_R}$$

$$\left\{ \lim_{y \to \xi^+} g(y) = \pm\infty \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \lim_{y \to \xi^+} \frac{g(x)}{g(y)} = 0, \ \text{και} \ \lim_{y \to \xi^+} \frac{f(x)}{g(y)} = 0 \right\} \Rightarrow$$

$$\lim_{y \to \xi^+} K_R \ = 0 \ \text{και} \ \lim_{y \to \xi^+} K_L \ = 0 \Rightarrow$$

$$\exists \delta_2 \ : \ \xi < y < \xi + \delta_2 \ \rightsquigarrow \ K_R < \frac{\epsilon}{2} \ \text{και} \ -\frac{\epsilon}{2} < K_L$$

Δηλαδή αποδείξαμε ότι:

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall, \epsilon > 0, \quad \exists \delta' = \min\{\delta, \delta_1, \delta_2\} > 0 \ : \\ \xi < y < \xi + \delta' \ \rightsquigarrow \ -\frac{3\epsilon}{2} \leq \dfrac{f(y)}{g(y)} - \ell \leq \frac{3\epsilon}{2} \end{array} \right\} \rightsquigarrow$$

$$\lim_{y \to \xi^+} \frac{f(y)}{g(y)} = \ell$$

Περίπτωση $\boxed{\xi = -\infty}$
Ιδια απόδειξη, θέτουμε $\xi \to -\infty$ και $\xi + \delta' \to -R$ □

$f(x)$ και $g(x)$ συνεχείς συναρτήσεις και παραγωγίσιμες γιά $x \in (a,\, \xi)$

$$\lim_{x \to \xi^-} g(x) = \pm\infty$$

$$\exists \lim_{x \to \xi^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x \to \xi^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \xi^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Παραδείγματα:

- $\boxed{\dfrac{0}{0}}$:
  - $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \ln \frac{a}{b}$
  - $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{(3^x - 2^x)^2} = \frac{1}{2\ln^2\left(\frac{3}{2}\right)}$
  - $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{x^{1/2} - a^{1/2} + (x-a)^{1/2}}{(x^2 - a^2)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}$
  - $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2}{1-\cos x} = 2$
- $\boxed{\infty - \infty}$
  - $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[n]{x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n} - x\right) = \frac{a_1}{n}$
- $\boxed{0 \cdot \infty}$
  - $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(b^{1/x} - 1\right) = \ln b$
- $\boxed{\infty^0}$
  - $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (1+x)^{1/x} = 1$
  - $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x} - \mathrm{e}}{x} = -\frac{\mathrm{e}}{2}$
  - $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \cot x\right) = 0$

Τύπος TAYLOR

$$\boxed{\begin{array}{c} f\,:\,[a,\,b]\,\to\,\mathbb{R} \\ f^{(n-1)}(x)\quad \textbf{συνεχής}\quad \forall\, x\in[a,\,b] \\ \exists\, f^{(n)}(x)\quad \forall\, x\in(a,\,b) \end{array}}$$

$$\Downarrow$$

$$\exists\,\xi\quad \textbf{μεταξύ}\quad x\quad \textbf{και}\quad x_0$$

$$\boxed{f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-x_0)^k}{k!}\,f^{(k)}(x_0)\;+\;R_n(x)}$$

$$\boxed{R_n(x)\;=\;\frac{(x-\xi)^{n-p}\;(x-x_0)^p}{p(n-1)!}\,f^{(n)}(\xi)}$$

υπόλοιπο Sclömlich-Roche

$p=1$ υπόλοιπο Cauchy

$$R_n(x)\;=\;\frac{(x-\xi)^{n-1}\;(x-x_0)}{(n-1)!}\,f^{(n)}(\xi)$$

$p=n$ υπόλοιπο Lagrange

$$R_n(x)\;=\;\frac{(x-x_0)^n}{n!}\,f^{(n)}(\xi)$$

Απόδειξη.

Θεωρούμε ότι $x < x_0$ (αν $x > x_0$ η απόδειξη είναι η ίδια)

$$
\begin{aligned}
& x \le t \le x_0 \\
& \phi(t) \overset{\text{ορ.}}{=} f(t) + \frac{x-t}{1!} f'(t) + \\
& \qquad + \frac{(x-t)^2}{2!} f''(t) + \frac{(x-t)^3}{3!} f^{(3)}(t) + \\
& \qquad + \cdots + \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(t) + A\,(x-t)^p = \\
& \qquad = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) + A\,(x-t)^p
\end{aligned}
$$

Το A είναι διαλεγμένο έτσι ώστε $\phi(x) = \phi(x_0)$. Εχουμε:

$$
\begin{aligned}
\phi(x_0) = & f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \\
& + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x-t)^3}{3!} f^{(3)}(x_0) + \\
& + \cdots + \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + A\,(x-x_0)^p = \\
& = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + A\,(x-x_0)^p \\
\phi(x) = & f(x)
\end{aligned}
$$

Η συνάρτηση $\phi(t)$ είναι συνεχής για $t \in [x, x_0]$ και υπάρχει $\phi'(t)$ για $t \in (x, x_0)$ και $\phi(x) = \phi(x_0)$ άρα από θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (x, x_0)$ τέτοιο ώστε $\phi'(\xi) = 0$.

$$
\begin{aligned}
\phi'(t) = & \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) - k \frac{(x-t)^{k-1}}{k!} f^{(k)}(t) \right) - \\
& - pA\,(x-t)^{p-1} = \\
& = f'(t) + \left(\frac{(x-t)}{1!} f^{(2)}(t) - f'(t) \right) + \\
& \quad + \left(\frac{(x-t)^2}{2!} f^{(3)}(t) - \frac{(x-t)}{1!} f^{(2)}(t) \right) + \\
& + \left(\frac{(x-t)^3}{3!} f^{(4)}(t) - \frac{(x-t)^2}{2!} f^{(3)}(t) \right) + \\
& + \cdots\cdots + \\
& + \left(\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) - \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-1)}(t) \right) + \\
& - pA\,(x-t)^{p-1} = \\
& = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) - pA\,(x-t)^{p-1}
\end{aligned}
$$

$$
\phi'(\xi) = 0 \;\rightsquigarrow\; A = \frac{(x-\xi)^{n-p}}{p(n-1)!} f^{(n)}(\xi)
$$

Το υπόλοιπο Sclömlich-Roche δίνεται από τον τύπο

$$
R_n(x) = A\,(x-x_0)^p
$$

□

Ανάπτυγμα Taylor

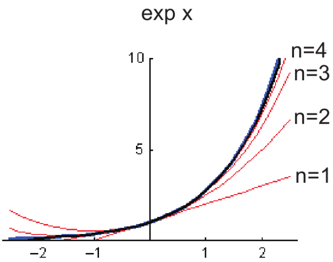
Αν η συνάρτηση $f(x)$ έχει $\boxed{\text{φραγμένη παράγωγο κάθε τάξης}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(x)$ για $x \in (a,\, b)$ και $\left|f^{(n)}(x)\right| < M \Rightarrow$

$$x,\, x_0 \in (a,\, b) \;\rightsquigarrow\; \boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)}$$

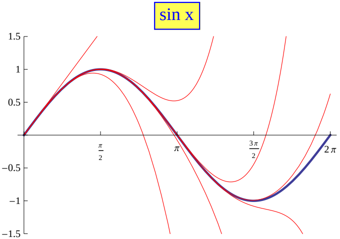
Ανάπτυγμα Maclaurin

Ανάπτυγμα Maclaurin $\equiv$ Ανάπτυγμα Taylor για $x_0 = 0$

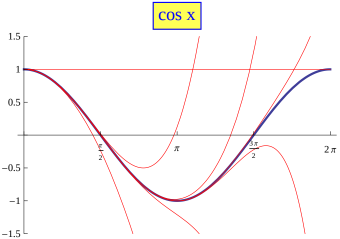
$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)}$$



$$\exp\, x = \mathrm{e}^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad |x| < \infty$$



$$\sin\, x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \;=\; \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$



$$\cos\, x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \;=\; \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

ΣΕΙΡΕΣ MACLAURIN

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad |x| < 1$$

$$\exp x = \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad |x| < \infty$$

$$\cosh x \equiv \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh x \equiv \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}$$

$$\exp(x) = e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \rightsquigarrow \exp(x+y) = (\exp x)(\exp y)$$

$$\cosh x \equiv \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh x \equiv \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\exp(i\,x) = e^{i\,x} = \sum_{n=0}^{\infty} i^{\,n} \frac{x^n}{n!} \rightsquigarrow \exp i\,(x+y) = (\exp i\,x)(\exp i\,y)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Ιδιότητες τριγωνομετρικών- υπερβολικών συναρτήσεων

$$\cosh\ x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh\ x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cos\ x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin\ x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{8} + \frac{3}{8}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) =$$
$$= \frac{\cos\ 3x}{4} + \frac{3\cos\ x}{4}$$

$$\frac{\sinh\ 5x}{\sinh\ x} = \frac{(e^x)^5 - (e^{-x})^5}{e^x - e^{-x}} =$$
$$= (e^x)^4 + (e^x)^3(e^{-x}) + (e^x)^2(e^{-x})^2 + (e^x)(e^{-x})^3 + (e^{-x})^4 =$$
$$= 2\cosh\ 4x + 2\cosh\ 2x + 1$$

Ανάπτυγμα Taylor

Αν η συνάρτηση $f(x)$ έχει $\boxed{\text{φραγμένη παράγωγο κάθε τάξης}}$,
$\forall\, n \in \mathbb{N}\ f^{(n)}(x)$ για $x \in (a,\, b)$ και $\left|f^{(n)}(x)\right| < M \Rightarrow$

$$x,\, x_0 \in (a,\, b) \ \rightsquigarrow\ f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

□ *Απόδ*: Χρησιμοποιούμε το υπόλοιπο Lagrange, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} R_n(x) =& \frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n)}(\xi) = \\ =& f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) \end{aligned}$$

$$|R_n(x)| \leq M \frac{|x-\xi|^n}{n!}$$

$$a_n = \frac{|x-\xi|^n}{n!} \ \rightsquigarrow\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x-\xi|}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Επομένως $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \rightsquigarrow R_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \rightsquigarrow$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!}$$

□

ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

Ορισμός Δυναμοσειράς-Ακτίνα σύγκλισης

Ορισμός Δυναμοσειράς: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

Ακτίνα σύγκλισης

$$R = \sup\{|x - x_0| \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \ \textbf{συγκλίνει}\}$$

$$\forall x \ : \ |x - x_0| < R \ \rightsquigarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \ \textbf{συγκλίνει}$$

Σημείωση Συνήθως (ΟΧΙ ΠΑΝΤΑ!!!) **η ακτίνα σύγκλισης** R **βρίσκεται** εφαρμόζοντας

- **είτε** το **κριτήριο του λόγου**

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x - x_0| < 1 \ \rightsquigarrow \ |x - x_0| < R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

- **είτε** το **κριτήριο της ρίζας**

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\, |x - x_0| < 1 \ \rightsquigarrow \ |x - x_0| < R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $R = 1$ **και** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$, $R = \infty$

Πρ:

Αν η συνάρτηση $f(x)$ έχει

$\boxed{\text{φραγμένη παράγωγο κάθε τάξης}}$

$f^{(n)}(x)$ **για** $x \in (a,\, b)$ **και** $\left|f^{(n)}(x)\right| < M \Rightarrow$

$$x,\, x_0 \in (a,\, b) \ \rightsquigarrow \ \boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!}\, f^{(k)}(x_0)}$$

□ *Απόδ*: Χρησιμοποιούμε το υπόλοιπο Lagrange, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} R_n(x) =& \frac{(x-\xi)^n}{n!}\, f^{(n)}(\xi) = \\ =& f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{k!}\, f^{(k)}(x_0) \end{aligned}$$

$$|R_n(x)| \leq M \frac{|x-\xi|^n}{n!}$$

$$a_n = \frac{|x-\xi|^n}{n!} \ \rightsquigarrow \ \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x-\xi|}{n+1} \ \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ 0$$

Επομένως $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \rightsquigarrow R_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \rightsquigarrow$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!}$$

□

x_0 Τοπικό Ακρότατο (Local Extremum)

$\boxed{\exists\,\delta \;:\; |x - x_0| < \delta \;\rightsquigarrow\; f(x) - f(x_0) \text{ έχει σταθερό πρόσημο}}$

$\swarrow \qquad\qquad \searrow$

Τοπικό Μέγιστο (Local Maximum)	Τοπικό Ελάχιστο (Local Minimum)
$\exists\,\delta : \lvert x - x_0\rvert < \delta \;\Downarrow\; f(x) \leq f(x_0)$	$\exists\,\delta : \lvert x - x_0\rvert < \delta \;\Downarrow\; f(x) \geq f(x_0)$

ΘΕΩΡΗΜΑ FERMAT

$$\left.\begin{array}{l} \triangleright\ f(x) \text{ συνεχής γύρω από το } x_0 \\ \triangleright\ \text{Υπάρχει το } f'(x_0) \\ \triangleright\ \text{Το } x_0 \text{ είναι τοπικό ακρότατο} \end{array}\right\} \Rightarrow \qquad f'(x_0) = 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ FERMAT, απόδειξη

- $f(x)$ συνεχής γύρω από το x_0
- Υπάρχει το $f'(x_0)$ $\qquad \Rightarrow f'(x_0) = 0$
- Το x_0 είναι τοπικό ακρότατο

Απόδειξη.

$$\exists\, f'(x_0) \;\Leftrightarrow\; g(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} f'(x_0)$$

$$\boxed{\left\{\text{Αν} \;\; f'(x_0) > 0\right\}} \;\Rightarrow\; \epsilon = \frac{f'(x_0)}{2} \;\exists\, \delta \;:$$

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \;\rightsquigarrow\; 0 < \frac{f'(x_0)}{2} < g(x, x_0)$$

$$\left.\begin{array}{r} 0 < g(x, x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ x < x_0 \end{array}\right\} \rightsquigarrow \; f(x) - f(x_0) < 0$$

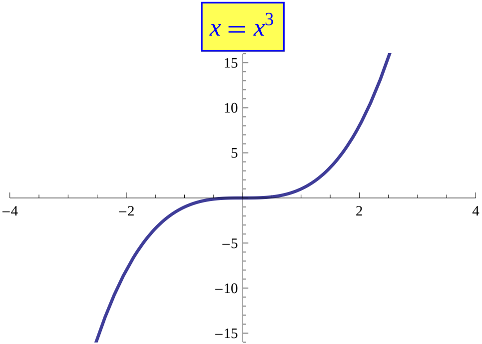
$$\left.\begin{array}{r} 0 < g(x, x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ x > x_0 \end{array}\right\} \rightsquigarrow \; f(x) - f(x_0) > 0$$

$\boxed{\text{Το } f(x_0) \text{ δεν είναι ακρότατο}}$.

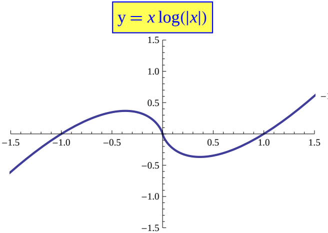
Το ίδιο συμβαίνει αν $f'(x_0) <$). Αρα $f'(x_0) = 0$. □

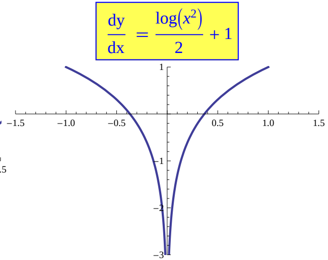
□

$f'(0) = 0$ αλλά το $x_0 = 0$ δεν είναι extremum

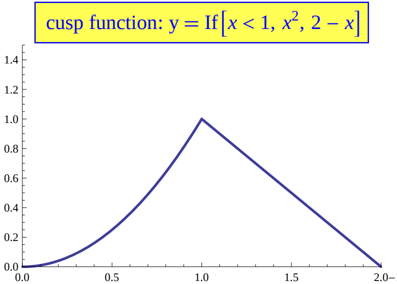


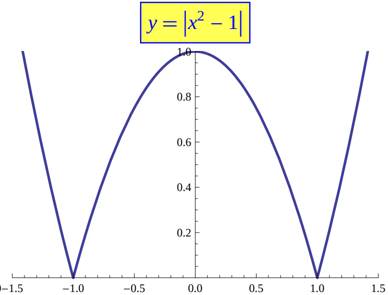
$f'(x_0)$ δεν ορίζεται, όχι extremum





$f'(x_0)$ δεν ορίζεται, υπάρχει extremum





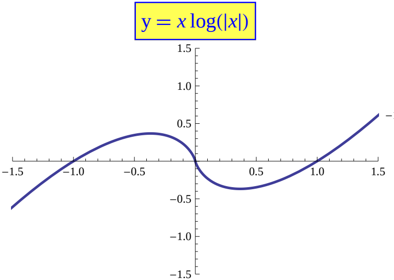
x_0 κρίσιμο σημείο (critical point) $\Rightarrow f'(x_0) = 0$ $\boxed{\text{ή}}$ $f'(x_0)$ <u>δεν</u> υπάρχει

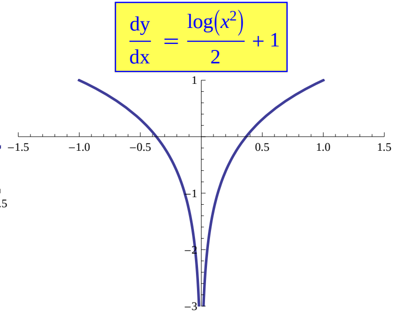
x_0 τοπικό μέγιστο

$\Downarrow$

x_0 κρίσιμο σημείο

$\Rightarrow$ SOS Τα κρίσιμα σημεία $\boxed{\boxed{\text{δεν}}}$ ειναι πάντα τοπικά ακρότατα





ΠΡΟΤΑΣΗ

$f(x)$ συνεχής στο $[a,\, b]$
$\forall\, x \in (a,\, x_0) \bigcup (x_0,\, b) \;\rightsquigarrow\; \exists\, f'(x)$

$$\begin{aligned} \exists\, \delta > 0 \;:\, x \in (x_0 - \delta,\, x_0) \;&\rightsquigarrow\; f'(x) > 0 \\ x \in (x_0,\, x_0 + \delta) \;&\rightsquigarrow\; f'(x) < 0 \end{aligned}$$

τότε το x_0 είναι τοπικό μέγιστο

ΠΡΟΤΑΣΗ "νιοστής παραγώγου"

$f(x)$ συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο $[a,\, b]$
$x \in [a,\, b] \;\rightsquigarrow\; \exists\, f^{(n-1)}(x)$ και είναι συνεχής
$x \in (a,\, b) \;\rightsquigarrow\; \exists\, f^{(n)}(x)$
$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ και $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ και $f^{(n)}(x)$ συνεχής γύρω από το x_0, τότε αν n άρτιος το x_0 είναι τοπικό μέγιστο

- Αν $f^{(n)}(x_0) > 0$ τοπικό ελάχιστο
- Αν $f^{(n)}(x_0) < 0$ τοπικό μέγιστο

ΠΡΟΤΑΣΗ "νιοστής παραγώγου"

$f(x)$ συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο $[a,\, b]$
$x \in [a,\, b] \;\rightsquigarrow\; \exists\, f^{(n-1)}(x)$ και είναι συνεχής
$x \in (a,\, b) \;\rightsquigarrow\; \exists\, f^{(n)}(x)$
$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ και $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ και $f^{(n)}(x)$ συνεχής γύρω από το x_0, τότε αν n άρτιος το x_0 είναι τοπικό μέγιστο

- Αν $f^{(n)}(x_0) > 0$ τοπικό ελάχιστο
- Αν $f^{(n)}(x_0) < 0$ τοπικό μέγιστο

Απόδειξη.

Με τις προϋποθέσεις ισχύει το ανάπτυγμα Taylor με υπόλοιπο Lagrange

$$\begin{aligned} f(x) = & \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + R_n(x) = \\ = & \; f(x_0) + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(\xi), \quad \xi \in (a,\, b) \end{aligned}$$

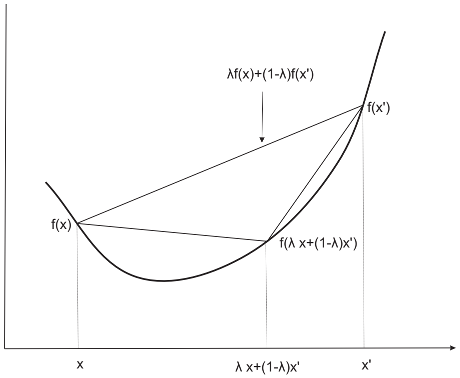
$n = 2k$. Αν $f^{(n)}(\xi) > 0$ τότε $f(x) - f(x_0) \geq 0$ άρα το x_0 τοπικό minimum. □

Ορισμός κυρτής συνάρτησης

$f(x)$ $\boxed{\text{κυρτή}}$ (convex)$\Leftrightarrow$

$$a \leq x < x' \leq b \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \;\rightsquigarrow$$

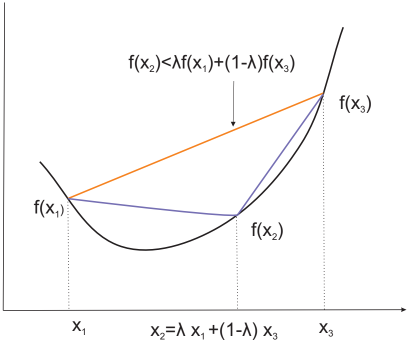
$$\boxed{f\left(\lambda x + (1-\lambda)x'\right) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x')}$$



Πρ:

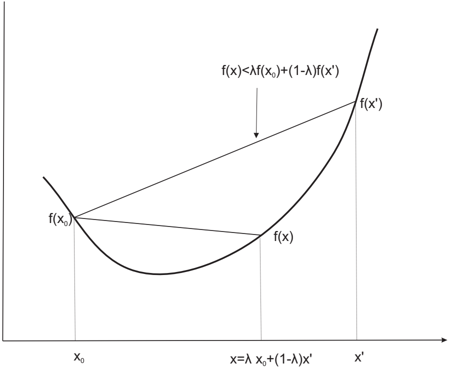
$\boxed{f(x) \text{ κυρτή}} \Leftrightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 < x_2 < x_3 \rightsquigarrow \\ \qquad \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \\ \quad \leq \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \end{array}}$$



Πρ:

$$f(x) \text{ κυρτή} \Leftrightarrow g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ είναι αύξουσα συνάρτηση.}$$



Πρ:

$$f(x) \text{ κυρτή} \Rightarrow f'_-(x) \leq f'_+(x)$$

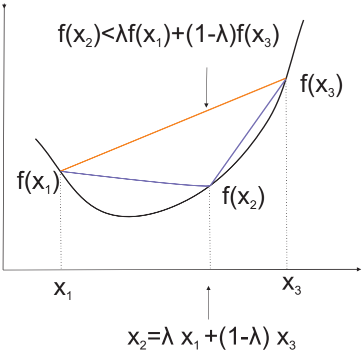
Πρ:

$$f(x) \text{ κυρτή} \Leftrightarrow f'(x) \text{ αύξουσα} \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$$

Πρ:

$\boxed{f(x) \text{ κυρτή}} \Leftrightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 < x_2 < x_3 \;\rightsquigarrow \\ \qquad \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \\ \qquad \leq \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \end{array}}$$



$f(x)$ κυρτή $\Leftrightarrow f'(x)$ αύξουσα $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$

$f(x)$ κυρτή $\Rightarrow$

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \leq$$
$$\leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

$f(x)$ κυρτή $a_k > 0 \Rightarrow$

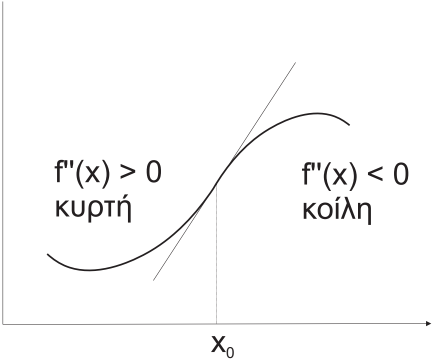
$$f\left(\frac{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right) \leq$$
$$\leq \frac{a_1f(x_1)+a_2f(x_2)+\cdots+a_nf(x_n)}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

$f(x) = \mathrm{e}^x \rightsquigarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ κυρτή

$a_k > 0 \Rightarrow$

$$\frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n}$$

Σημείο καμπής (turning point) $\Leftrightarrow \quad f''(x_0 - h) \cdot f''(x_0 + h) < 0$



x_0 σημείο καμπής $\exists\, f''(x_0)$ $\Rightarrow \boxed{f''(x_0) = 0}$

(Σημ. το αντίστροφο δεν ισχύει)

Πρ:

$$\boxed{\begin{array}{c} f^{(n)}(x) \text{ συνεχής στο } (a,\, b) \\ f''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = \cdots = \\ \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \\ f^{(n)}(x_0) \neq 0 \\ n \text{ περιττός} \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} x_0 \\ \text{σημείο} \\ \text{καμπής} \end{array}}$$