1. Ασκησεισ Επαγωγησ

Ασκηση 1.1. *Αποδείξτε ότι ο αριθμός* $n^3 - n$ *είναι πολλαπλάσιο του 6.*

Ασκηση 1.2. *Αποδείξτε ότι* $2^n > 10n^2$ *για* $n \geq 10$

Ασκηση 1.3. *Αποδειξτε ότι*

(i) *(Ανισότητα Bernoulli) Αν* $x \geq -1$ *τότε* $(1+x)^n \geq 1 + nx$

(ii) *Αν* $x \geq 0$ *τότε* $(1+x)^n \geq 1 + nx + \dfrac{n(n-1)}{2}x^2$

(iii) *Αν* $0 < x < \dfrac{1}{n}$ *τότε* $(1+x)^n < \dfrac{1}{1-nx}$

(iv) *Αν* $0 \leq x \leq 1$ *τότε* $1 - nx \leq (1-x)^n \leq \dfrac{1}{1+nx}$

Ασκηση 1.4. *Αποδείξτε ότι*

(i) $1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cdots+\cos nx = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{2}(n+1)x\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

(ii) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin nx = \dfrac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{1}{2}(n+1)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

Ασκηση 1.5. *Αποδείξτε ότι:* $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

Ασκηση 1.6. *(Γενίκευση της ανισότητας Bernoulli Αν* $x_k > 0$ *για* $k = 1, 2, \ldots, n$ *(ή* $-1 < x_k < 0$ *για* $k = 1, 2, \ldots, n$ *) τότε αποδειξτε ότι*

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Ασκηση 1.7. *Αν* $x_k > 0$ *για* $k = 1, 2, \ldots, n$ *και* $\prod\limits_{k=1}^{n} x_k = 1$ *τότε αποδειξτε ότι* $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \geq n$

Ασκηση 1.8. *Αν* $x_k > 0$ *για* $k = 1, 2, \ldots, n$ *τότε αποδειξτε ότι*

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \geq \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}$$

Αριθμητικός μέσος $\geq$ *Γεωμετρικός μέσος* $\geq$ *Αρμονικός μέσος*

Σημ: Χρησιμοποιείστε την άσκηση 1.7

Ασκηση 1.9. *Εστω* $\sigma(n)$ *το άθροισμα των (θετικών) διαιρετών του* n *και* $\tau(n)$ *ο αριθμός των (θετικών) διαιρετών του* n*. Να αποδειχθεί ότι*

$$\sigma(n) \geq \tau(n)\sqrt{n}$$

Ασκηση 1.10. *Να αποδείξετε ότι:*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=1 \quad \textit{και} \quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$$

$$\sum_{k \text{ άρτιος}}^{n}\binom{n}{k}x^k=\frac{(1+x)^n+(1-x)^n}{2}$$

$$\sum_{k \text{ περιττός}}^{n}\binom{n}{k}x^k=\frac{(1+x)^n-(1-x)^n}{2}$$

Ασκηση 1.11. *Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός* $\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n+\left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2}$ *είναι φυσικός*

Ασκηση 1.12. *Αποδείξτε ότι*

$$\binom{p+q}{k}=\sum_{\ell=0}^{k}\binom{p}{\ell}\binom{q}{k-\ell}$$

Σημ: Χρησιμοποείστε την σχέση $(1+x)^{p+q}=(1+x)^p\,(1+x)^q$