x_0 Τοπικό Ακρότατο
(Local Extremum)
$\exists\, \delta \,:\, |x - x_0| < \delta \rightsquigarrow$
$f(x) - f(x_0)$ έχει σταθερό πρόσημο

$\swarrow$ $\searrow$

Τοπικό Μέγιστο
(Local Maximum)

$$\boxed{\exists\, \delta : |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)}$$

Τοπικό Ελάχιστο
(Local Minimum)

$$\boxed{\begin{array}{c} \exists\, \delta : |x - x_0| < \delta \\ \Downarrow \\ f(x) \geq f(x_0) \end{array}}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ FERMAT

$$\left.\begin{array}{l} \triangleright\ f(x) \text{ συνεχής γύρω από το } x_0 \\ \triangleright\ \text{Υπάρχει το } f'(x_0) \\ \triangleright\ \text{Το } x_0 \text{ είναι τοπικό ακρότατο} \end{array}\right\} \Rightarrow \qquad f'(x_0) = 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ FERMAT, απόδειξη

- $f(x)$ συνεχής γύρω από το x_0
- Υπάρχει το $f'(x_0)$ $\qquad \Rightarrow f'(x_0) = 0$
- Το x_0 είναι τοπικό ακρότατο

Απόδειξη.

$$\exists\, f'(x_0) \;\Leftrightarrow\; g(x,x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} f'(x_0)$$

$$\boxed{\left\{\text{Αν } \; f'(x_0) > 0\right\}} \;\Rightarrow\; \epsilon = \frac{f'(x_0)}{2} \;\exists\, \delta \;:$$

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \;\rightsquigarrow\; 0 < \frac{f'(x_0)}{2} < g(x,x_0)$$

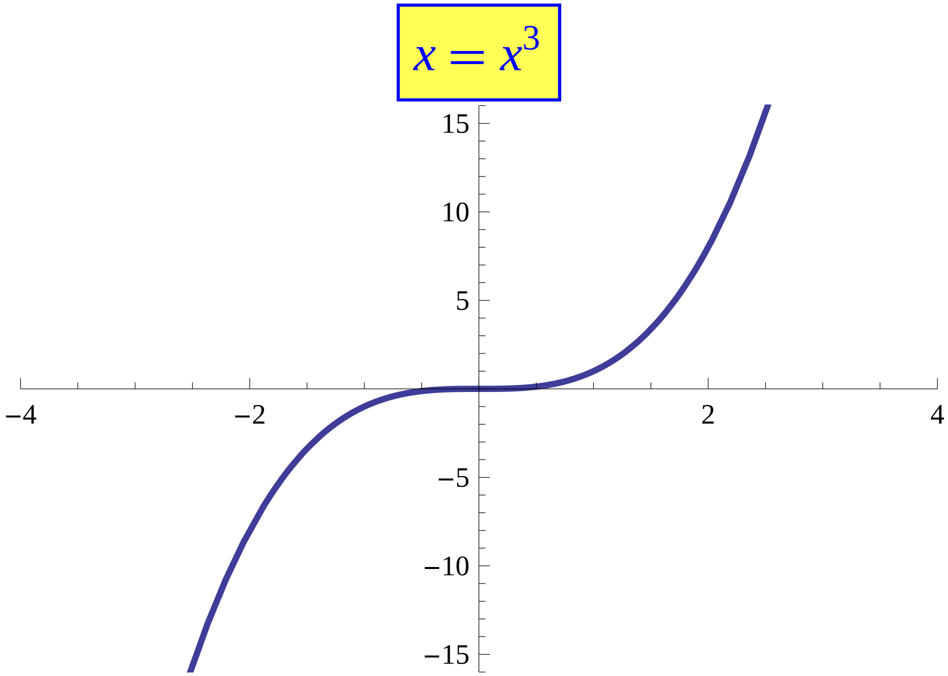
$$\left.\begin{array}{r} 0 < g(x,x_0) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\ x < x_0 \end{array}\right\} \;\rightsquigarrow\; f(x)-f(x_0) < 0$$

$$\left.\begin{array}{r} 0 < g(x,x_0) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\ x > x_0 \end{array}\right\} \;\rightsquigarrow\; f(x)-f(x_0) > 0$$

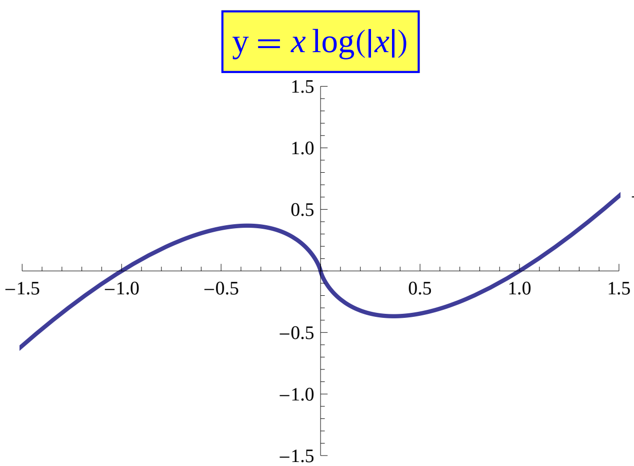
$\boxed{\text{Το } f(x_0) \text{ δεν είναι ακρότατο}}$.

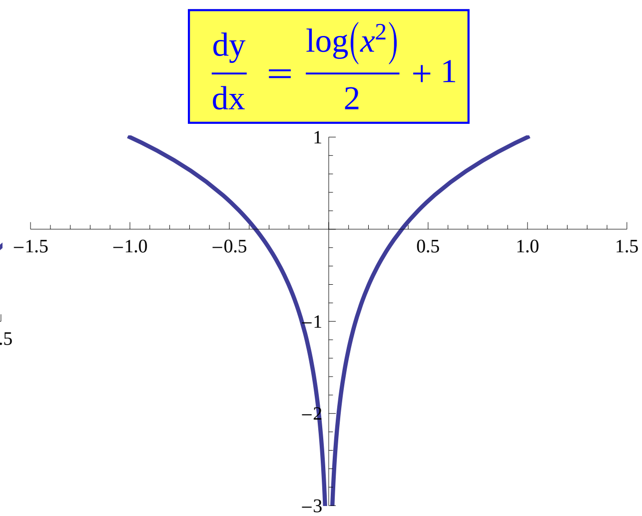
Το ίδιο συμβαίνει αν $f'(x_0) <)$. Αρα $f'(x_0) = 0$. □ □

$f'(0) = 0$ αλλά το $x_0 = 0$ δεν είναι extremum

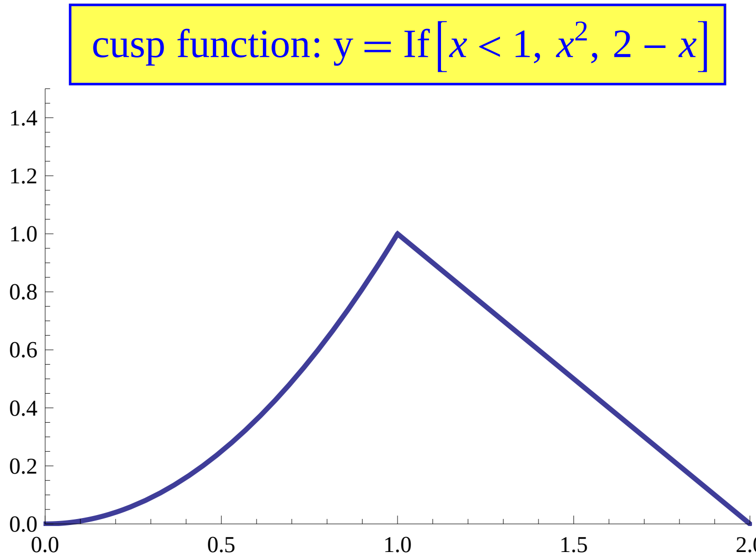


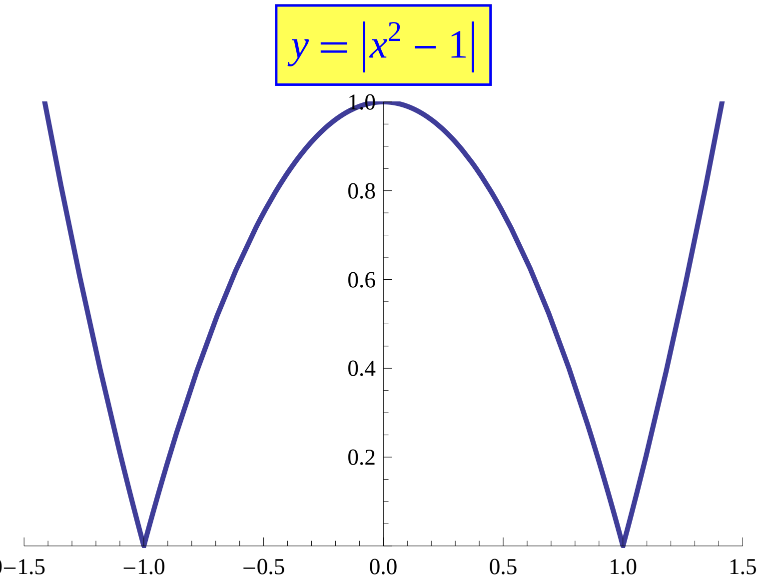
$f'(x_0)$ δεν ορίζεται, όχι extremum





$f'(x_0)$ δεν ορίζεται, υπάρχει extremum





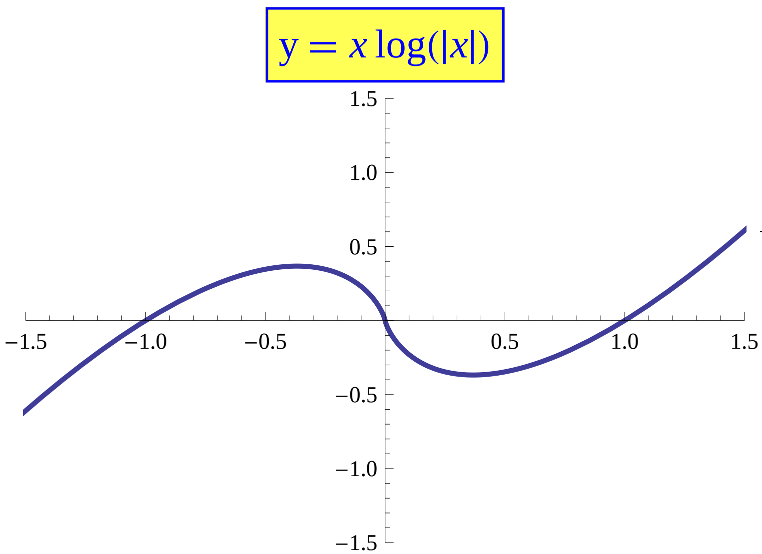
x_0 κρίσιμο σημείο (critical point) $\Rightarrow f'(x_0) = 0$ $\boxed{\text{ή}}$ $f'(x_0)$ <u>δεν</u> υπάρχει

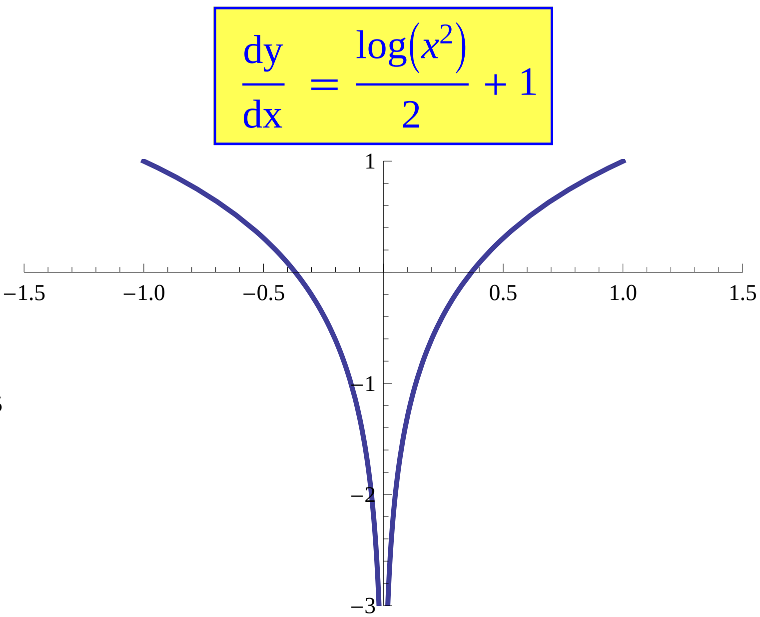
x_0 τοπικό μέγιστο

$\Downarrow$

x_0 κρίσιμο σημείο

$\Rightarrow$ SOS Τα κρίσιμα σημεία $\boxed{\boxed{\text{δεν}}}$ ειναι πάντα τοπικά ακρότατα





ΠΡΟΤΑΣΗ

$f(x)$ συνεχής στο $[a,\, b]$
$\forall\, x \in (a,\, x_0) \bigcup (x_0,\, b) \;\rightsquigarrow\; \exists\, f'(x)$

$$\begin{aligned} \exists\, \delta > 0 \;:\, x \in (x_0 - \delta,\, x_0) &\;\rightsquigarrow\; f'(x) > 0 \\ x \in (x_0,\, x_0 + \delta) &\;\rightsquigarrow\; f'(x) < 0 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

Το x_0 είναι τοπικό μέγιστο

ΠΡΟΤΑΣΗ “νιοστής παραγώγου”

$f(x)$ συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο $[a,\, b]$
$x \in [a,\, b] \;\rightsquigarrow\; \exists\, f^{n-1}(x)$ και είναι συνεχής
$x \in (a,\, b) \;\rightsquigarrow\; \exists\, f^{n}(x)$
$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ και $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ $f^{(n)}(x)$ συνεχής γύρω από το x_0

$$\Downarrow$$

Αν n $\boxed{\text{άρτιος}}$ το x_0 είναι τοπικό μέγιστο
Αν $f^{(n)}(x_0) > 0$ τοπικό ελάχιστο
Αν $f^{(n)}(x_0) < 0$ τοπικό μέγιστο

ΠΡΟΤΑΣΗ "νιοστής παραγώγου"

$f(x)$ συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο $[a,\, b]$
$x \in [a,\, b] \;\rightsquigarrow\; \exists\, f^{n-1}(x)$ και είναι συνεχής
$x \in (a,\, b) \;\rightsquigarrow\; \exists\, f^{n}(x)$
$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ και $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ $f^{(n)}(x)$ συνεχής γύρω από το x_0

$$\Downarrow$$

Αν n $\boxed{\text{άρτιος}}$ το x_0 είναι τοπικό μέγιστο
Αν $f^{(n)}(x_0) > 0$ τοπικό ελάχιστο
Αν $f^{(n)}(x_0) < 0$ τοπικό μέγιστο

Απόδειξη.

☐ *Απόδ*: Με τις προυποθέσεις ισχύει το ανάπτυγμα Taylor με υπόλοιπο Lagrange

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + R_n(x) = \\ &= f(x_0) + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(\xi), \quad \xi \in (a,\, b) \end{aligned}$$

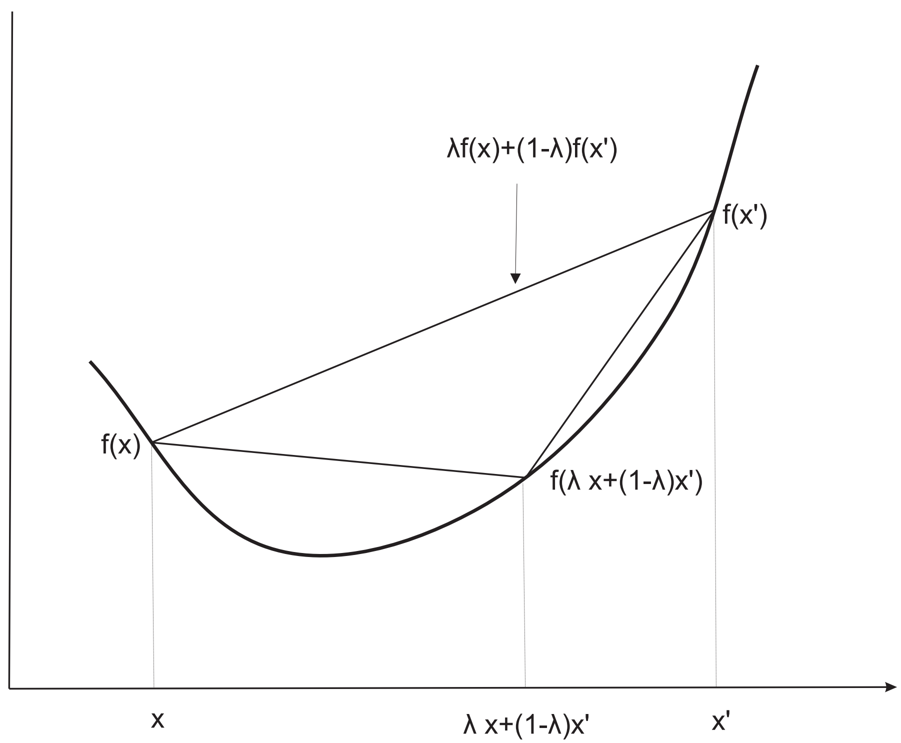
$n = 2k$. Αν $f^{(n)}(\xi) > 0$ τότε $f(x) - f(x_0) \geq 0$ άρα το x_0 τοπικό minimum. □

Ορισμός κυρτής συνάρτησης

$f(x)$ $\boxed{\text{κυρτή}}$ (convex)$\Leftrightarrow$

$$a \leq x < x' \leq b \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \;\rightsquigarrow$$

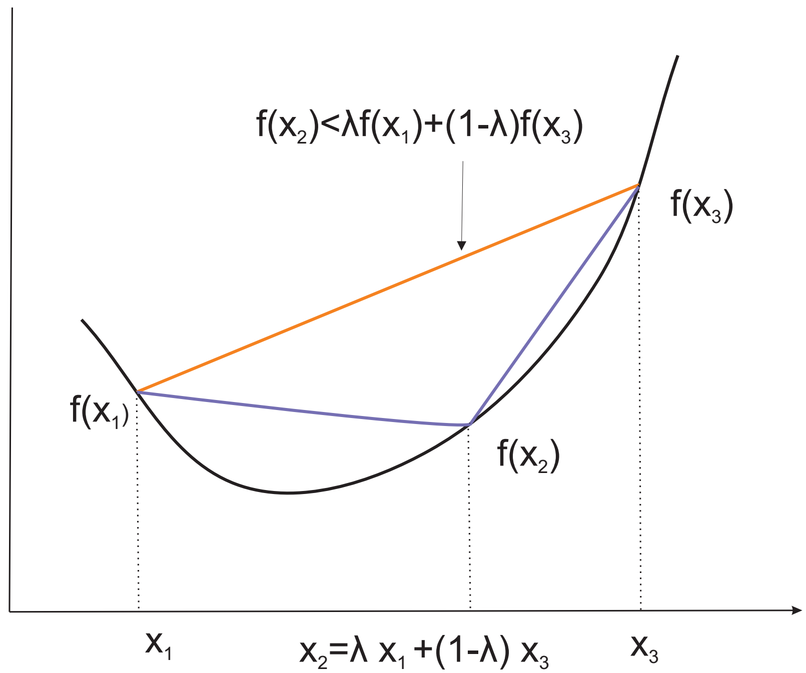
$$\boxed{f\left(\lambda x + (1-\lambda)x'\right) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x')}$$



Πρ:

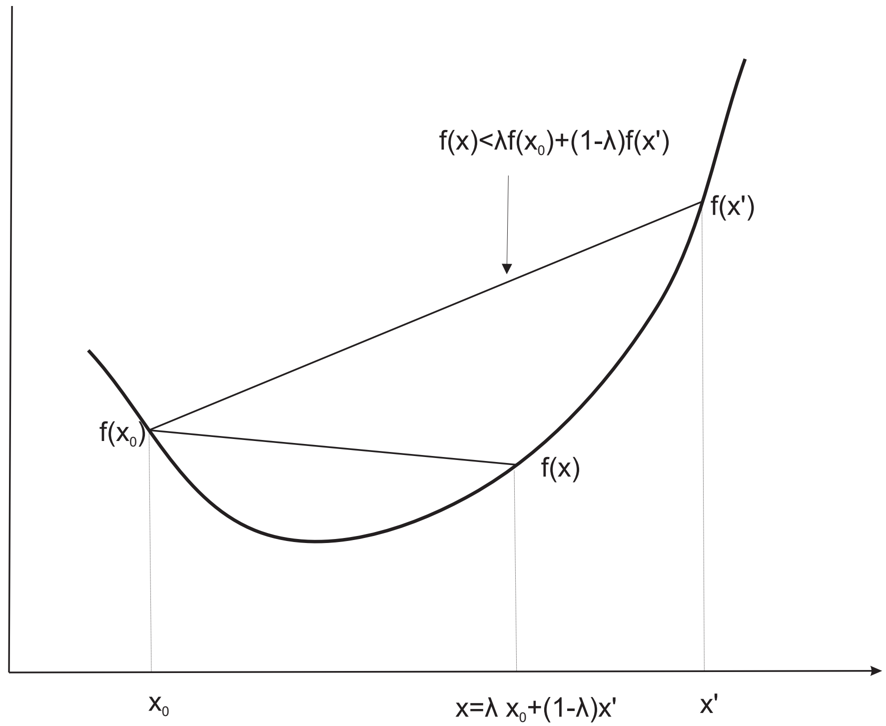
$\boxed{f(x) \text{ κυρτή}} \Leftrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} & x_1 < x_2 < x_3 \rightsquigarrow \\ & \qquad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \\ & \quad \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \end{aligned}}$$



Πρ:

$$f(x) \text{ κυρτή} \Leftrightarrow g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ είναι αύξουσα συνάρτηση.}$$



Πρ:

$$f(x) \text{ κυρτή} \Rightarrow f'_{-}(x) \leq f'_{+}(x)$$

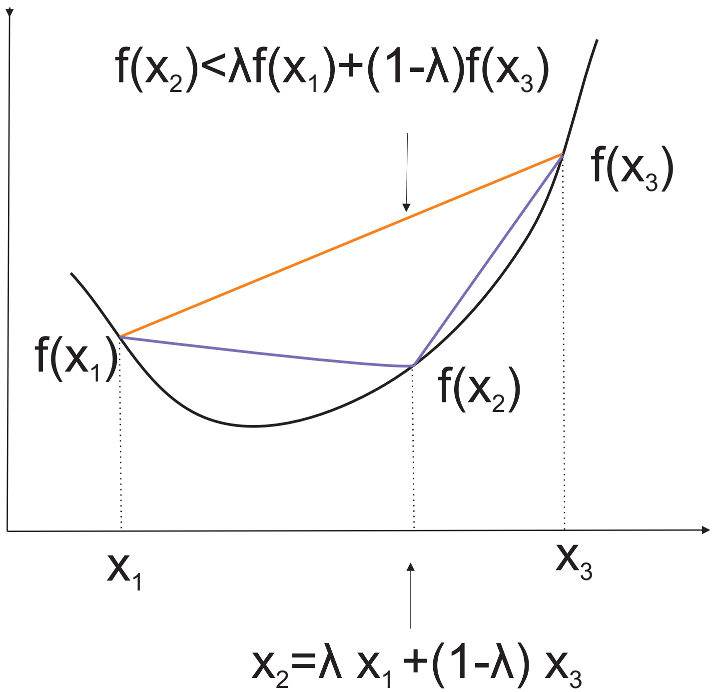
Πρ:

$$f(x) \text{ κυρτή} \Leftrightarrow f'(x) \text{ αύξουσα} \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$$

Πρ:

$\boxed{f(x) \text{ κυρτή}} \Leftrightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 < x_2 < x_3 \rightsquigarrow \\ \qquad \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \\ \quad \leq \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \end{array}}$$



$f(x)$ κυρτή $\Leftrightarrow f'(x)$ αύξουσα $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$

$f(x)$ κυρτή $\Rightarrow$

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \leq$$
$$\leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

$f(x)$ κυρτή $a_k > 0 \Rightarrow$

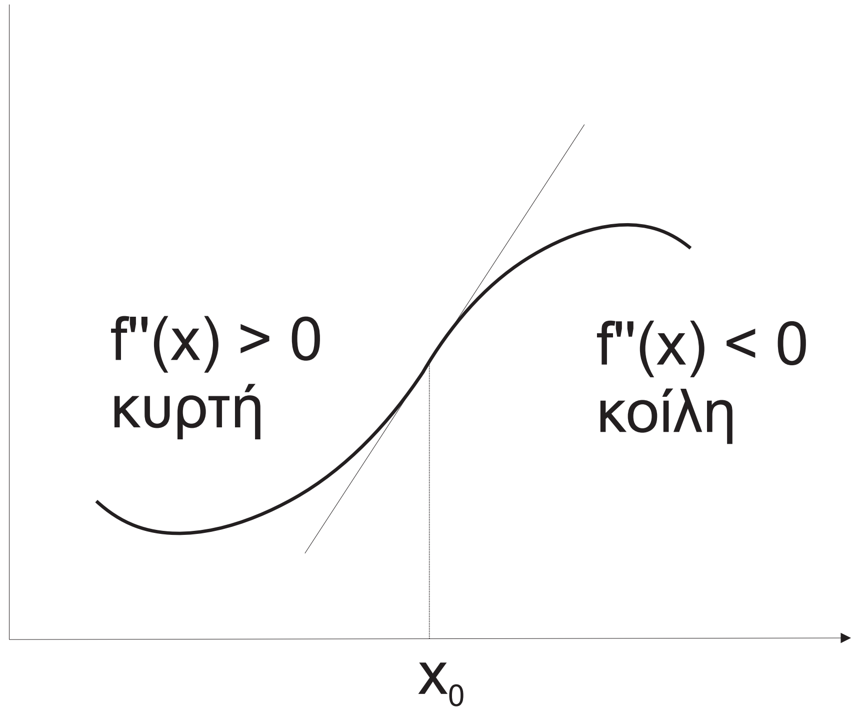
$$f\left(\frac{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right) \leq$$
$$\leq \frac{a_1f(x_1)+a_2f(x_2)+\cdots+a_nf(x_n)}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

$f(x) = \mathrm{e}^x \ \rightsquigarrow\ f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ κυρτή

$a_k > 0 \Rightarrow$

$$\frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n}$$

Σημείο καμπής (turning point) $\Leftrightarrow \quad f''(x_0 - h) \cdot f''(x_0 + h) < 0$



x_0 σημείο καμπής
$\exists\, f''(x_0)$ $\Rightarrow \boxed{f''(x_0) = 0}$

(Σημ. το αντίστροφο δεν ισχύει)

Πρ:

$$\boxed{\begin{array}{c} f^{(n)}(x) \text{ συνεχής στο } (a,\, b) \\ f''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = \cdots = \\ \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \\ f^{(n)}(x_0) \neq 0 \\ n \text{ περιττός} \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} x_0 \\ \text{σημείο} \\ \text{καμπής} \end{array}}$$