ΚΑΝΟΝΕΣ de l' HOSPITAL

ΚΑΝΟΝΕΣ de l' HOSPITAL σε ένα σημείο για συναρτήσεις που μηδενίζονται

$f(x)$ και $g(x)$ συνεχείς συναρτήσεις και παραγωγίσιμες γιά $x \in (a, \xi)$

$$\lim_{x\to\xi^+} f(x) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\xi^+} g(x) = 0$$

$$\exists \lim_{x\to\xi^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x\to\xi^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Απόδειξη.

Περίπτωση $\boxed{|\xi| < \infty}$

$$\left\{ \lim_{x\to\xi^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall,\, \epsilon > 0, \quad \exists\, \delta > 0\ : \\ \xi < s < \xi + \delta \rightsquigarrow -\epsilon < \dfrac{f'(s)}{g'(s)} - \ell < \epsilon \end{array} \right\}$$

Γενικευμένο Θεωρ. Μ.Τ. $\rightsquigarrow$
Αν $\xi < y < x < \xi + \delta \Rightarrow \exists s\ :\ \xi < y < s < x < \xi + \delta$
$\dfrac{f'(s)}{g'(s)} = \dfrac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)}$ επομένως

$$-\epsilon < \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - \ell < \epsilon \rightsquigarrow$$

$$-\epsilon \le \lim_{y\to\xi^+} \left(\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - \ell \right) = \frac{f(x)}{g(x)} - \ell \le \epsilon$$

Δηλαδή αποδείξαμε ότι:

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall,\, \epsilon > 0, \quad \exists\, \delta > 0\ : \\ \xi < x < \xi + \delta \rightsquigarrow -\epsilon \le \dfrac{f(x)}{g(x)} - \ell \le \epsilon \end{array} \right\} \rightsquigarrow$$

$$\lim_{x\to\xi^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

Περίπτωση $\boxed{\xi = -\infty}$ Ιδια απόδειξη, θέτουμε $\xi \to -\infty$ και $\xi + \delta \to -R$ □

ΚΑΝΟΝΕΣ de l' HOSPITAL σε ένα σημείο για συναρτήσεις που μηδενίζονται

$f(x)$ και $g(x)$ συνεχείς συναρτήσεις και παραγωγίσιμες γιά $x \in (a, \xi)$

$$\lim_{x\to\xi^-} f(x) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\xi^-} g(x) = 0$$

$$\exists \lim_{x\to\xi^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x\to\xi^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Κανόνες de l'Hospital για απειρήσημες συναρτήσεις

Κανόνες de l'Hospital για απειρήσημες συναρτήσεις

$f(x)$ και $g(x)$ συνεχείς συναρτήσεις και παραγωγίσιμες γιά $x \in (\xi,\, b)$

$$\lim_{x\to\xi^+} g(x) = \pm\infty$$

$$\exists \lim_{x\to\xi^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x\to\xi^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Απόδειξη.

Περίπτωση $\boxed{|\xi| < \infty}$

$$\left\{\lim_{x\to\xi^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} \forall,\, \epsilon > 0, \quad \exists\, \delta > 0\ : \\ \xi < s < \xi + \delta \ \rightsquigarrow\ -\epsilon < \dfrac{f'(s)}{g'(s)} - \ell < \epsilon \end{array}\right\}$$

Γενικευμένο Θεωρ. Μ.Τ. $\rightsquigarrow$
Αν $\xi < y < x < \xi + \delta \Rightarrow \exists\, s\ :\ \xi < y < s < x < \xi + \delta$

$$\frac{f'(s)}{g'(s)} = \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{\frac{f(y)}{g(y)} - \frac{f(x)}{g(y)}}{1 - \frac{g(x)}{g(y)}}$$

$$\left\{\lim_{x\to\xi^+} g(x) = \pm\infty\right\} \Rightarrow$$

$$\exists\, \delta_1\ :\ \xi < y < \xi + \delta_1 \ \rightsquigarrow\ \frac{g(x)}{g(y)} < 1 \ \rightsquigarrow\ 0 < 1 - \frac{g(x)}{g(y)}$$

επομένως

$$\ell - \epsilon < \frac{\frac{f(y)}{g(y)} - \frac{f(x)}{g(y)}}{1 - \frac{g(x)}{g(y)}} < \ell + \epsilon \rightsquigarrow$$

$$(\ell - \epsilon)\left(1 - \frac{g(x)}{g(y)}\right) < \frac{f(y)}{g(y)} - \frac{f(x)}{g(y)} < (\ell + \epsilon)\left(1 - \frac{g(x)}{g(y)}\right)$$

$$\rightsquigarrow\ (\ell - \epsilon) + \underbrace{\frac{f(x)}{g(y)} - (\ell - \epsilon)\frac{g(x)}{g(y)}}_{K_L} < \frac{f(y)}{g(y)} <$$

$$(\ell + \epsilon) + \underbrace{\frac{f(x)}{g(y)} - (\ell + \epsilon)\frac{g(x)}{g(y)}}_{K_R}$$

$$\left\{\lim_{y\to\xi^+} g(y) = \pm\infty\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\lim_{y\to\xi^+} \frac{g(x)}{g(y)} = 0, \ \text{και}\ \lim_{y\to\xi^+} \frac{f(x)}{g(y)} = 0\right\} \Rightarrow$$

$$\lim_{y\to\xi^+} K_R = 0 \ \text{και}\ \lim_{y\to\xi^+} K_L = 0 \Rightarrow$$

$$\exists\, \delta_2\ :\ \xi < y < \xi + \delta_2 \ \rightsquigarrow\ K_R < \frac{\epsilon}{2} \ \text{και}\ -\frac{\epsilon}{2} < K_L$$

Δηλαδή αποδείξαμε ότι:

$$\left\{\begin{array}{c} \forall,\, \epsilon > 0, \quad \exists\, \delta' = \min\{\delta, \delta_1, \delta_2\} > 0\ : \\ \xi < y < \xi + \delta' \ \rightsquigarrow\ -\frac{3\epsilon}{2} \le \dfrac{f(y)}{g(y)} - \ell \le \frac{3\epsilon}{2} \end{array}\right\} \rightsquigarrow$$

$$\lim_{y\to\xi^+} \frac{f(y)}{g(y)} = \ell$$

Περίπτωση $\boxed{\xi = -\infty}$
Ιδια απόδειξη, θέτουμε $\xi \to -\infty$ και $\xi + \delta' \to -R$ $\square$

$f(x)$ και $g(x)$ συνεχείς συναρτήσεις και παραγωγίσιμες γιά $x \in (a,\, \xi)$

$$\lim_{x\to\xi^-} g(x) = \pm\infty$$

$$\exists \lim_{x\to\xi^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x\to\xi^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Παραδείγματα:

- $\boxed{\dfrac{0}{0}}$:
  - $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x} = \ln \dfrac{a}{b}$
  - $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos\, x}{(3^x - 2^x)^2} = \dfrac{1}{2\, \ln^2\left(\dfrac{3}{2}\right)}$
  - $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{x^{1/2} - a^{1/2} + (x-a)^{1/2}}{(x^2 - a^2)^{1/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2a}}$
  - $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2}{1-\cos\, x} = 2$
- $\boxed{\infty - \infty}$
  - $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[n]{x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n} - x\right) = \dfrac{a_1}{n}$
- $\boxed{0 \cdot \infty}$
  - $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(b^{1/x} - 1\right) = \ln\, b$
- $\boxed{\infty^0}$
  - $\lim\limits_{x\to\infty} (1+x)^{1/x} = 1$
  - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x} - \mathrm{e}}{x} = -\frac{\mathrm{e}}{2}$
  - $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \cot\, x\right) = 0$

Τύπος TAYLOR

$$\boxed{\begin{array}{c} f\,:\,[a,\,b]\to\mathbb{R} \\ f^{(n-1)}(x)\quad \textbf{συνεχής}\quad \forall\, x\in[a,\,b] \\ \exists\, f^{(n)}(x)\quad \forall\, x\in(a,\,b) \end{array}}$$

$$\Downarrow$$

$$\exists\,\xi \quad \textbf{μεταξύ} \quad x \quad \textbf{και} \quad x_0$$

$$\boxed{f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-x_0)^k}{k!}\,f^{(k)}(x_0)\;+\;R_n(x)}$$

$$\boxed{R_n(x)\;=\;\frac{(x-\xi)^{n-p}\,(x-x_0)^p}{p(n-1)!}\,f^{(n)}(\xi)}$$

υπόλοιπο Sclömlich-Roche

$p=1$ υπόλοιπο Cauchy

$$R_n(x)\;=\;\frac{(x-\xi)^{n-1}\,(x-x_0)}{(n-1)!}\,f^{(n)}(\xi)$$

$p=n$ υπόλοιπο Lagrange

$$R_n(x)\;=\;\frac{(x-x_0)^n}{n!}\,f^{(n)}(\xi)$$

Απόδειξη.

Θεωρούμε ότι $x < x_0$ (αν $x > x_0$ η απόδειξη είναι η ίδια)

$$\begin{aligned}
& x \le t \le x_0 \\
\phi(t) \overset{\text{ορ.}}{\equiv} & f(t) + \frac{x-t}{1!} f'(t) + \\
& + \frac{(x-t)^2}{2!} f''(t) + \frac{(x-t)^3}{3!} f^{(3)}(t) + \\
& + \cdots + \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(t) + A\,(x-t)^p = \\
& = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) + A\,(x-t)^p
\end{aligned}$$

Το A είναι διαλεγμένο έτσι ώστε $\phi(x) = \phi(x_0)$. Εχουμε:

$$\begin{aligned}
\phi(x_0) = & f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \\
& + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x-t)^3}{3!} f^{(3)}(x_0) + \\
& + \cdots + \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + A\,(x-x_0)^p = \\
& = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + A\,(x-x_0)^p \\
\phi(x) = & f(x)
\end{aligned}$$

Η συνάρτηση $\phi(t)$ είναι συνεχής για $t \in [x, x_0]$ και υπάρχει $\phi'(t)$ για $t \in (x, x_0)$ και $\phi(x) = \phi(x_0)$ άρα από θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (x, x_0)$ τέτοιο ώστε $\phi'(\xi) = 0$.

$$\begin{aligned}
\phi'(t) = & \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) - k\frac{(x-t)^{k-1}}{k!} f^{(k)}(t) \right) - \\
& - pA\,(x-t)^{p-1} = \\
= & f'(t) + \left(\frac{(x-t)}{1!} f^{(2)}(t) - f'(t) \right) + \\
& + \left(\frac{(x-t)^2}{2!} f^{(3)}(t) - \frac{(x-t)}{1!} f^{(2)}(t) \right) + \\
& + \left(\frac{(x-t)^3}{3!} f^{(4)}(t) - \frac{(x-t)^2}{2!} f^{(3)}(t) \right) + \\
& + \cdots\cdots + \\
& + \left(\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) - \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-1)}(t) \right) + \\
& - pA\,(x-t)^{p-1} = \\
= & \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) - pA\,(x-t)^{p-1}
\end{aligned}$$

$$\phi'(\xi) = 0 \;\rightsquigarrow\; A = \frac{(x-\xi)^{n-p}}{p(n-1)!} f^{(n)}(\xi)$$

Το υπόλοιπο Sclömlich-Roche δίνεται από τον τύπο

$$R_n(x) = A\,(x-x_0)^p$$

□

Ανάπτυγμα Taylor

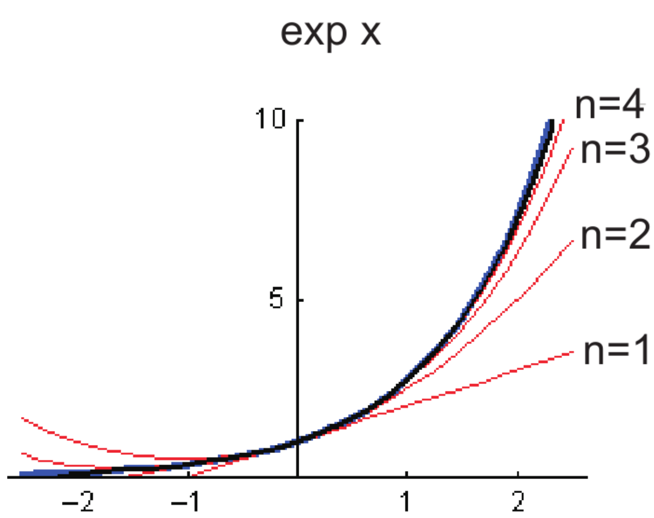
Αν η συνάρτηση $f(x)$ έχει $\boxed{\text{φραγμένη παράγωγο κάθε τάξης}}$,
$\forall\, n \in \mathbb{N}\ f^{(n)}(x)$ για $x \in (a,\, b)$ και $\left| f^{(n)}(x) \right| < M \Rightarrow$

$$x,\, x_0 \in (a,\, b) \ \rightsquigarrow\ f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^k}{k!}\, f^{(k)}(x_0)$$

Ανάπτυγμα Maclaurin

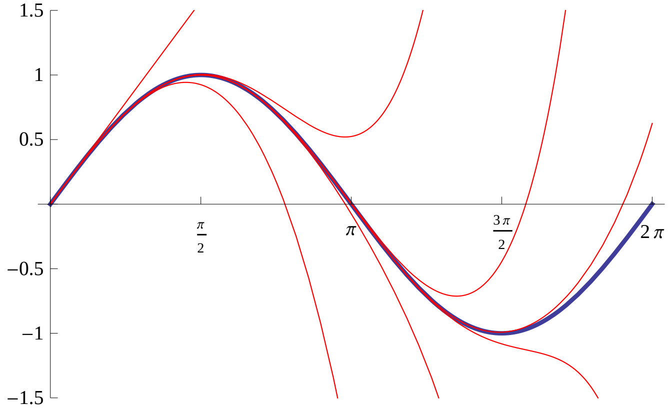
Ανάπτυγμα Maclaurin $\equiv$ Ανάπτυγμα Taylor για $x_0 = 0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\, f^{(k)}(0)$$



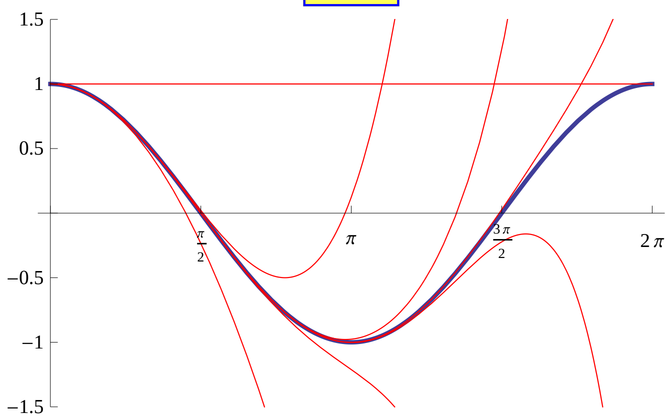
$$\exp\, x \;=\; e^{x} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad |x| < \infty$$

sin x



$$\sin\, x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

cos x



$$\cos\, x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

ΣΕΙΡΕΣ MACLAURIN

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad |x| < 1$$

$$\exp x = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad |x| < \infty$$

$$\cosh x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Ανάπτυγμα Taylor

Αν η συνάρτηση $f(x)$ έχει $\boxed{\text{φραγμένη παράγωγο κάθε τάξης}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(x)$ για $x \in (a,\, b)$ και $\left|f^{(n)}(x)\right| < M \Rightarrow$

$$x,\, x_0 \in (a,\, b) \;\rightsquigarrow\; f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

☐ *Απόδ*: Χρησιμοποιούμε το υπόλοιπο Lagrange, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} R_n(x) =& \frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n)}(\xi) = \\ =& f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) \end{aligned}$$

$$|R_n(x)| \leq M \frac{|x-\xi|^n}{n!}$$

$$a_n = \frac{|x-\xi|^n}{n!} \;\rightsquigarrow\; \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x-\xi|}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Επομένως $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \rightsquigarrow R_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \rightsquigarrow$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!}$$

$\square$

ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

Ορισμός Δυναμοσειράσ-Ακτίνα σύγκλισης

Ορισμός Δυναμοσειράς: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n$

Ακτίνα σύγκλισης

$$R = \sup\{|x - x_0| \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n \text{ συγκλίνει}\}$$

$$\forall\, x \ : \ |x - x_0| < R \ \rightsquigarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n \text{ συγκλίνει}$$

Σημείωση Συνήθως (ΟΧΙ ΠΑΝΤΑ!!!) η ακτίνα σύγκλισης R βρίσκεται εφαρμόζοντας

- **είτε** το **κριτήριο του λόγου**

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x - x_0| < 1 \ \rightsquigarrow \ |x - x_0| < R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

- **είτε** το **κριτήριο της ρίζας**

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\, |x - x_0| < 1 \ \rightsquigarrow \ |x - x_0| < R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $R = 1$ και $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$, $R = \infty$

Πρ:

Αν η συνάρτηση $f(x)$ έχει $\boxed{\text{φραγμένη παράγωγο κάθε τάξης}}$ $f^{(n)}(x)$ για $x \in (a,\, b)$ και $\left|f^{(n)}(x)\right| < M \Rightarrow$

$$x,\, x_0 \in (a,\, b) \;\rightsquigarrow\; \boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^k}{k!}\, f^{(k)}(x_0)}$$

□ *Απόδ*: Χρησιμοποιούμε το υπόλοιπο Lagrange, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} R_n(x) =& \frac{(x-\xi)^n}{n!}\, f^{(n)}(\xi) = \\ =& f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x - x_0)^k}{k!}\, f^{(k)}(x_0) \end{aligned}$$

$$|R_n(x)| \le M \frac{|x-\xi|^n}{n!}$$

$$a_n = \frac{|x-\xi|^n}{n!} \;\rightsquigarrow\; \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x-\xi|}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Επομένως $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \rightsquigarrow R_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \rightsquigarrow$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^k}{k!}$$

□