Θεώρημα εσωτερικών ακραίων τιμών/Interior Extremum Theorem

Πρόταση

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \forall c \in (a, b) \quad \exists\, f'(c) \,\text{αν} \quad f'(c) > 0 \Rightarrow$$
$$\exists\, \delta > 0 \;: c < x < c + \delta \;\rightsquigarrow\; f(c) < f(x)$$
$$\text{και} \;\; c - \delta < x' < c \;\rightsquigarrow\; f(x') < f(c)$$

$f'(c) > 0 \rightsquigarrow$ η $f(x)$ είναι τοπικά αύξουσα

$f'(c) < 0 \rightsquigarrow$ η $f(x)$ είναι τοπικά φθίνουσα

Θεώρημα εσωτερικών ακραίων τιμών/Interior Extremum Theorem

$f(x)$ παραγωγίσιμη στο $[a, b] \Rightarrow f(x)$ συνεχής στο $[a, b]$

$$\Downarrow$$

$$\exists\, x_m \in [a, b] \;:\; f(x_m) = \min_{x \in [a, b]} f(x) \Rightarrow \boxed{\text{Αν } x_m \in (a, b) \rightsquigarrow f'(x_m) = 0}$$

και

$$\exists\, x_M \in [a, b] \;:\; f(x_M) = \max_{x \in [a, b]} f(x) \Rightarrow \boxed{\text{Αν } x_M \in (a, b) \rightsquigarrow f'(x_M) = 0}$$

Πρόταση

Θεώρημα εσωτερικών ακραίων τιμών/Interior Extremum Theorem-Αποδείξεις

$$f:[a,\,b]\longrightarrow\mathbb{R}\quad\text{και}\quad\forall c\in(a,\,b)\quad\exists\, f'(c)$$
$$\text{αν}\quad f'(c)>0\ \Rightarrow$$
$$\exists\,\delta>0\ :c<x<c+\delta\ \rightsquigarrow\ f(c)<f(x)$$
$$\text{και}\ \ c-\delta<x'<c\ \rightsquigarrow\ f(x')<f(c)$$

Απόδειξη.

$$g(x,\,c)=\frac{f(c)-f(x)}{c-x}$$
$$f'(c)>0\ \rightsquigarrow\ \lim_{x\to c} g(x,c)\ =f'(c)\ \rightsquigarrow$$
$$\forall\,\epsilon>0\quad\exists\,\delta>0\ :$$
$$c-\delta<x<c+\delta\rightsquigarrow\ f'(c)-\epsilon<g(x,c)<f'(c)+\epsilon$$
$$\text{Αν}\ \epsilon<f'(c)\ (\ \text{πχ}\ \ \epsilon=\frac{f'(c)}{10})\ \rightsquigarrow\ 0<g(x,c)$$
$$\text{Αν}\ \ c<x<c+\delta\ \rightsquigarrow$$
$$0<\frac{f(c)-f(x)}{c-x}\ \rightsquigarrow\ f(c)-f(x)<0$$
$$\text{Αν}\ \ c-\delta<x<c\ \rightsquigarrow$$
$$0<\frac{f(c)-f(x)}{c-x}\ \rightsquigarrow\ f(c)-f(x)>0$$

□

$f'(c)>0\ \rightsquigarrow$ η $f(x)$ είναι τοπικά αύξουσα
$f'(c)<0\ \rightsquigarrow$ η $f(x)$ είναι τοπικά φθίνουσα

Θεώρημα εσωτερικών ακραίων τιμών/Interior Extremum Theorem

$$f(x)\ \text{παραγωγίσιμη στο}\ [a,\,b]$$
$$\Downarrow$$
$$f(x)\ \text{συνεχής στο}\ [a,\,b]$$
$$\Downarrow$$
$$\exists\,x_m\in[a,\,b]\ :\ f(x_m)=\min_{x\in[a,\,b]} f(x)$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Αν}\ x_m\in(a,\,b)\rightsquigarrow f'(x_m)=0}$$
$$\text{και}$$
$$\exists\,x_M\in[a,\,b]\ :\ f(x_M)=\max_{x\in[a,\,b]} f(x)$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Αν}\ x_M\in(a,\,b)\rightsquigarrow f'(x_M)=0}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ DARBOUX

ΘΕΩΡΗΜΑ DARBOUX ή Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών για παραγώγους

$$f : [a,\, b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \forall x \in [a,\, b] \ \rightsquigarrow \ \exists\, f'(x)$$

$$\text{και} \quad f'(a) < f'(b) \ \ (\text{ή } f'(a) > f'(b))$$

$$\text{αν} \quad f'(a) < k < f'(b) \ \ \big(\text{ή } f'(a) > k > f'(b)\big) \ \Rightarrow \ \exists \xi \in (a,\, b) : f'(\xi) = k$$

ΘΕΩΡΗΜΑ DARBOUX-Απόδειξη

ΘΕΩΡΗΜΑ DARBOUX ή Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών για παραγώγους

$$\begin{aligned} & f : [a,\, b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \forall x \in [a,\, b] \rightsquigarrow \exists\, f'(x) \\ & \text{και} \quad f'(a) < f'(b) \;\; (\text{ή } f'(a) > f'(b)) \\ & \text{αν} \quad f'(a) < k < f'(b) \;\; \big(\text{ή } f'(a) > k > f'(b)\big) \;\Rightarrow \\ & \Rightarrow \; \exists \xi \in (a,\, b) : f'(\xi) = k \end{aligned}$$

Απόδειξη.

$f'(a) < k < f'(b)$, $g(x) = f(x) - kx$

$$\begin{aligned} & g'(a) = f'(a) - k < 0 \rightsquigarrow \\ & \qquad \exists\, \delta_1 > 0 \;: a < x < a + \delta_1 \;\rightsquigarrow\; g(x) < g(a) \\ & g'(b) = f'(b) - k > 0 \rightsquigarrow \\ & \qquad \exists\, \delta_2 > 0 \;: b - \delta_2 < x < b \;\rightsquigarrow\; g(x) < g(b) \end{aligned}$$

$f(x)$ συνεχής $\rightsquigarrow \exists \xi \in (a,\, b)$:

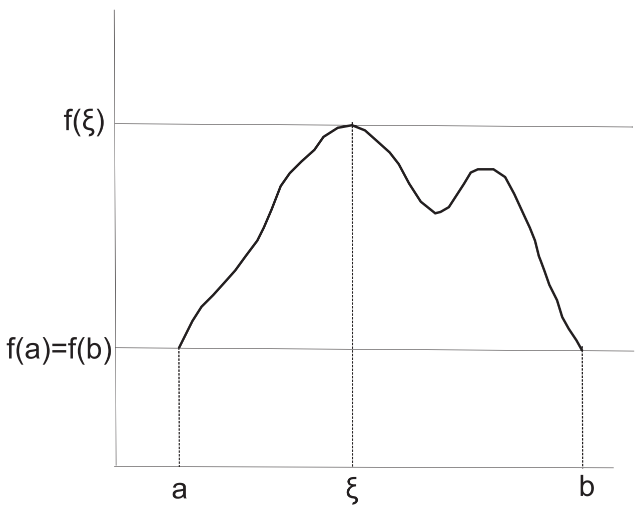
$$\begin{aligned} & g(\xi) = \min\Big\{ g(x),\; x \in [a,\, b] \Big\} \rightsquigarrow g'(\xi) = 0 \\ & \rightsquigarrow f'(\xi) = k \end{aligned}$$

Σημ. Το ξ δεν μπορεί να είναι το a είτε το b. $\square$ $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

$$\left\{\begin{array}{r} f\,:\,[a,\,b]\longrightarrow\mathbb{R}\quad \textbf{συνεχής}\\ \boxed{\textbf{και}}\quad \forall x\in(a,\,b)\quad \exists\, f'(x)\\ \boxed{\textbf{και}}\quad f(a)=f(b)\end{array}\right\}\Rightarrow\Big\{\exists\,\xi\in(a,\,b)\;:\;f'(\xi)=0\Big\}$$



Μεταξύ δύο (διαδοχικών) ριζών μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης υπάρχει μια ρίζα της παραγώγου

Από τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle καμμιά δεν μπορεί να παραληφθεί

$f(x)$ συνεχής , $f(0) = f(1)$ αλλά $\boxed{\text{μη}}$ παραγωγίσιμη σε κάποιο σημείο π.χ

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν} \quad 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \\ 1 - x & \text{αν} \quad \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases} \qquad \text{ΟΧΙ} \quad f'(\xi) = 0$$

$f(x)$ $\boxed{\text{μη}}$ συνεχής σε κάποιο σημείο, $f(0) = f(1)$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ π.χ

$$f(x) = x - [x] \ \Rightarrow \ f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν} \quad 0 \le x < 1 \\ \\ 0 & \text{αν} \quad x = 1 \end{cases}$$

$f'(x) = 1$ για $x \in (0, 1)$

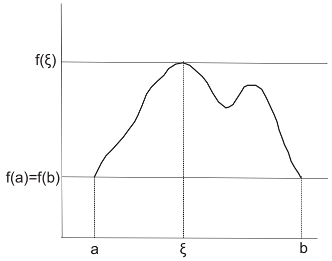
$f(x)$ συνεχής και παραγωγίσιμη αλλά $\boxed{f(1) \neq f(2)}$ πχ

$$f(x) = x^2, \quad x \in [1, 2] \quad \text{ΟΧΙ} \quad f'(\xi) = 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE-Απόδειξη

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

$$\left\{\begin{array}{l} f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}\quad \text{συνεχής} \\ \boxed{\text{και}}\quad \forall x\in(a,b)\quad \exists\, f'(x) \\ \qquad \boxed{\text{και}}\quad f(a)=f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\exists\,\xi\in(a,b)\ :\ f'(\xi)=0\right\}$$



Απόδειξη.

☐ *Απόδ*:

$$f(x)\ \text{συνεχής}\ \rightsquigarrow$$

$$\exists\, x_m\in[a,b]\ \rightsquigarrow m=f(x_m)=\min\left\{f(x),\ x\in[a,b]\right\}$$

$$\exists\, x_M\in[a,b]\ \rightsquigarrow M=f(x_M)=\max\left\{f(x),\ x\in[a,b]\right\}$$

Περίπτωση 1: $m=M \rightsquigarrow f(x)=$σταθερά $\rightsquigarrow f'(x)=0$
Περίπτωση 2α: $m<M$ Αν $x_M\neq a$ και $x_M\neq b$ τότε

$$\exists\,\xi=x_M\in(a,b)\ \rightsquigarrow\ f'(\xi)=0$$

Περίπτωση 2β: $m<M$ Αν $x_M=a$ (ή $x_M=b$) τότε $f(a)=f(b)=M$

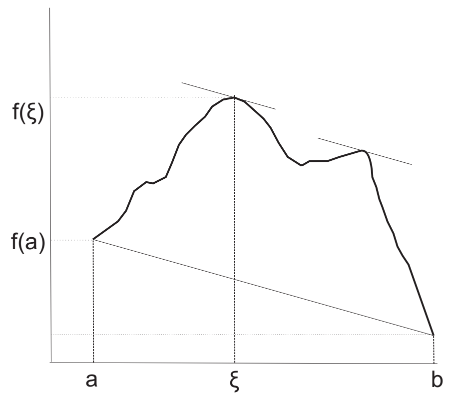
$$\exists\,\xi=x_m\in(a,b)\ \rightsquigarrow\ f'(\xi)=0$$

☐

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ- ΓΕΝΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

$$\left.\begin{array}{lll} f:[a,b] & \longrightarrow \mathbb{R} & \textbf{συνεχής} \\ \textbf{και} & \forall\, x\in(a,b) & \exists\, f'(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \exists \xi \in (a,b)\ :\ f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right.$$



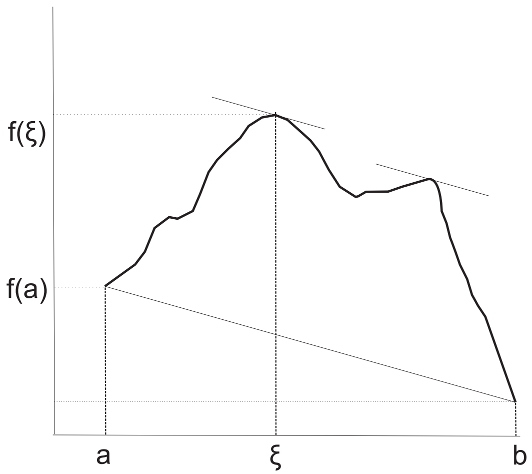
ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

$$\left\{\begin{array}{lll} f:[a,b] & \longrightarrow \mathbb{R} & \textbf{συνεχής} \\ \textbf{και} & \forall\, x\in(a,b) & \exists\, f'(x) \\ g:[a,b] & \longrightarrow \mathbb{R} & \textbf{συνεχής} \\ \textbf{και} & \forall\, x\in(a,b) & \exists\, g'(x) \\ & \textbf{και} \quad g(a)\neq g(b) & \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \xi \in (a,b)\ :\ \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ- Απόδειξη

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

$$\left\{ \begin{array}{lll} f : [a, b] & \longrightarrow \mathbb{R} & \text{συνεχής} \\ \text{και} & \forall\, x \in (a, b) & \exists\, f'(x) \end{array} \right\}$$
$$\Downarrow$$
$$\exists \xi \in (a, b) \;:\; f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Απόδειξη.

$$h(x) = x\,(f(b) - f(a)) - f(x)\,(b - a)$$
$$h(a) = a\,(f(b) - f(a)) - f(a)\,(b - a) = af(b) - bf(a)$$
$$h(b) = b\,(f(b) - f(a)) - f(b)\,(b - a) = af(b) - bf(a)$$
$$\rightsquigarrow\ h(a) = h(b)$$
$$h'(x) = (f(b) - f(a)) - f'(x)\,(b - a)$$

Η συνάρτηση $h(x)$ είναι συνεχής για $x \in [a, b]$ και $\exists\, f'(x)$ για $x \in (a, b)$

$\overset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow} \exists\, \xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ □

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ-Απόδειξη

$$\left\{\begin{array}{lll} f:\,[a,\,b] \longrightarrow \mathbb{R} & \text{συνεχής} \\ \text{και} \quad \forall x \in (a,\,b) & \exists\, f'(x) \\ g:\,[a,\,b] \longrightarrow \mathbb{R} & \text{συνεχής} \\ \text{και} \quad \forall x \in (a,\,b) & \exists\, g'(x) \\ \text{και} \quad g(a) \neq g(b) \end{array}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \xi \in (a,\,b)\,:\,\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Απόδειξη.

$$h(x) = g(x)\,(f(b)-f(a)) - f(x)\,(g(b)-g(a))$$

$$h(a) = g(a)\,(f(b)-f(a)) - f(a)\,(g(b)-g(a)) =$$

$$= g(a)f(b) - g(b)f(a)$$

$$h(b) = g(b)\,(f(b)-f(a)) - f(b)\,(g(b)-g(a)) =$$

$$= g(a)f(b) - g(b)f(a)$$

$$\rightsquigarrow\ h(a) = h(b)$$

$$h'(x) = g'(x)\,(f(b)-f(a)) - f'(x)\,(g(b)-g(a))$$

Η συνάρτηση $h(x)$ είναι συνεχής για $x \in [a,\,b]$ και $\exists\, f'(x)$ για $x \in (a,\,b)$

$\overset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow} \exists\, \xi \in (a,\,b)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ $\square$ $\square$

Εφαρμογές Θεωρήματος Μέσης Τιμής

$f(x)$ είναι συνεχής στο $[a,\ b]$ και $f'(x) = 0$ για $x \in (a,\ b)$. Τότε η συνάρτηση είναι σταθερά στο $[a,\ b]$.

$f(x)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x \in (a,\ b)$. Αν η $f'(x)$ δεν αλλάζει πρόσιμο τότε είναιο μονότονη.

Αν $|f'(x)| < M$ τότε $|f(x) - f(y)| < |x - y|$