Παράγωγος Συνάρτησης

Ορισμός Παραγώγου σε ένα σημείο

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ σε ένα σημείο ξ είναι το όριο (αν υπάρχει!)

$$\boxed{f'(\xi) = \lim_{x\to\xi} g(x,\xi), \quad g(x,\xi) = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}$$

- Ορισμός *Cauchy*:

$$\forall\,\epsilon > 0\ \exists\,\delta(\epsilon,\xi) > 0\ \forall\,x\ |x-\xi| < \delta \ \Rightarrow\ |f'(\xi) - g(x,\xi)| < \epsilon$$

- Ορισμός $\mathfrak{Heine}$:

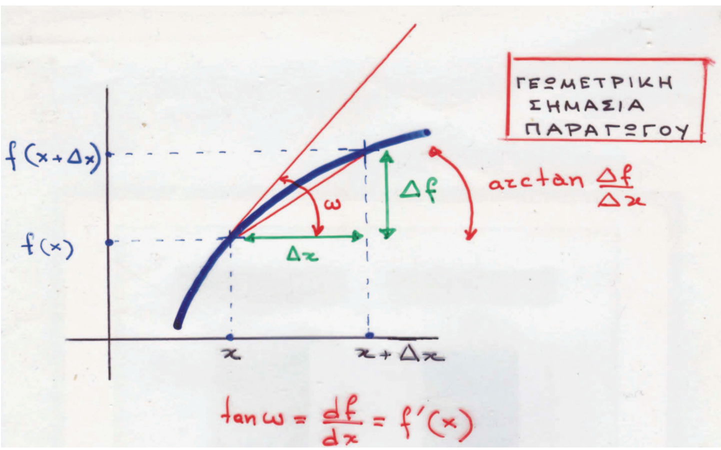
$$\forall\,x_n \to \xi \ \Rightarrow\ g(x_n,\xi) \to f'(\xi)$$

$\exists\, f'(x) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Παράγωγος από αριστερά} = \\ = \text{Παράγωγος από δεξιά} \end{array} \right\}$

$$\lim_{x\to\xi-} g(x,\xi) \equiv f'_-(\xi) = f'_+(\xi) \equiv \lim_{x\to\xi+} g(x,\xi)$$

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΟΙ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\left(\begin{array}{c}\text{όπου } \Delta f(x) = \\ = f(x+\Delta x)-f(x)\end{array}\right) = \frac{df}{dx}
\end{aligned}
$$



$$
\boxed{\frac{df}{dx} = \lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n - x}}
$$

$$
f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}
$$

Πρόταση

Αν υπάρχει το $f'(\xi)$ τότε η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο ξ

Απόδειξη.

$$f(x) - f(\xi) = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}(x - \xi) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \lim_{x \to \xi} (f(x) - f(\xi)) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \lim_{x \to \xi} (x - \xi) = 0$$

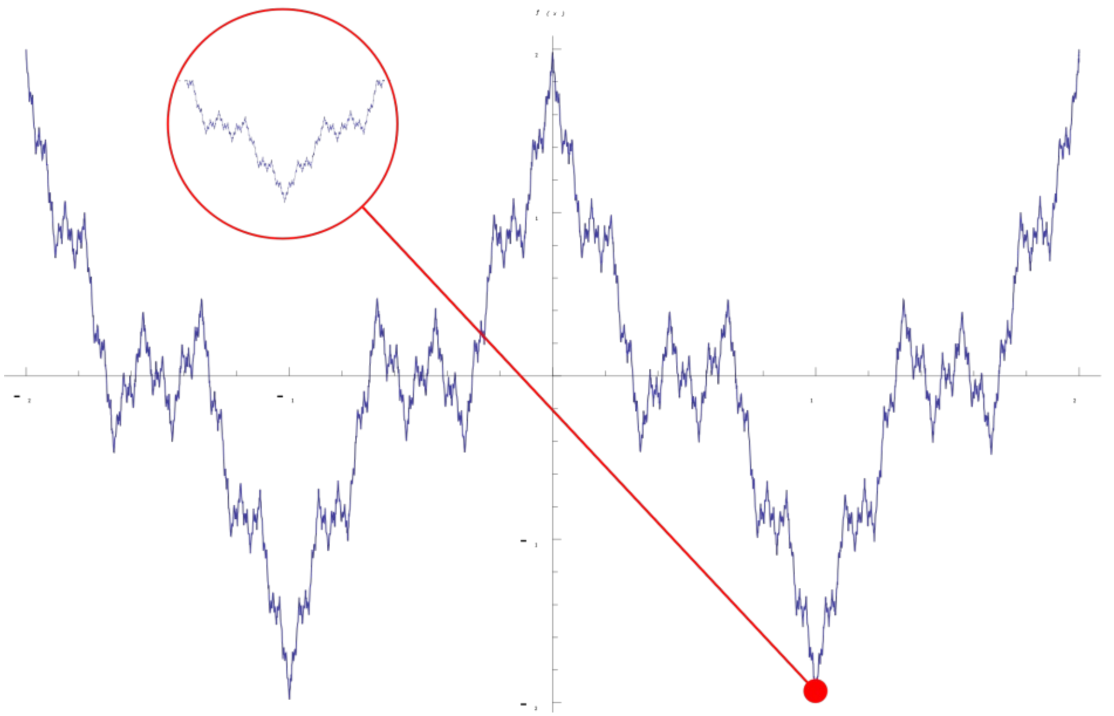
$\square$

- Προσοχή: Το αντίστροφο <u>δεν</u> ισχύει. Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής σε κάθε περιοχή γύρω από το $x = 0$ αλλά <u>δεν</u> έχει παράγωγο στο $x = 0$
- Υπάρχουν συναρτήσεις παντού συνεχείς αλλά δεν έχουν πουθενά παράγωγο ! πχ η συνάρτηση Weierstrass

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(17^n x)}{2^n}$$

Υπάρχουν συναρτήσεις παντού συνεχείς αλλά δεν έχουν πουθενά παράγωγο ! πχ η συνάρτηση Weierstrass

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(17^n x\right)}{2^n}$$



'fractal' δομή της καμπύλης.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

1. $(\mu f)'(x) = \mu f'(x)$ για $\mu \in \mathbb{R}$
2. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
3. $(f\,g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ Leibnitz rule
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
5. $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$ Chain rule

   ή $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{df}{dg}\,\dfrac{dg}{dx}$
6. $f(x)$ γνήσια μονότονη συνάρτηση, $f'(x) \neq 0$

   $$\left.\begin{array}{c} f(\xi) = \eta \\ \xi = f^{-1}(\eta) \end{array}\right\} \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(\eta) = 1/f'(\xi)$$

   ή $\frac{df^{-1}(\eta)}{d\eta} = \frac{d\xi}{d\eta} = \frac{1}{d\eta/d\xi} = \frac{1}{df(\xi)/d\xi}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ- Αποδείξεις

1. $(\mu f)'(x) = \mu f'(x)$ για $\mu \in \mathbb{R}$
2. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
3. $(f\,g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ Leibnitz rule

   □ *Απόδ* ($\mathfrak{Heine}$):

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_n)g(x_n)}{x - x_n} = f(x)\frac{g(x) - g(x_n)}{x - x_n} + g(x_n)\frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n}$$

   Παίρνουμε το όριο $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ □

4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
5. $(f \circ g)'(x) = f'\left(g(x)\right)g'(x)$ Chain rule

   ή $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{df}{dg}\,\dfrac{dg}{dx}$

   □ *Απόδ* ($\mathfrak{Heine}$):

$$\frac{f\left(g(x)\right) - f\left(g(x_n)\right)}{x - x_n} == \frac{f\left(g(x)\right) - f\left(g(x_n)\right)}{g(x) - g(x_n)} \cdot \frac{g(x) - g(x_n)}{x - x_n} = \frac{f\left(g\right) - f\left(g\right)}{g - g_n} \cdot \frac{g(x) - g(x_n)}{x - x_n}$$

   Παίρνουμε το όριο $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \rightsquigarrow g_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$ □

6. $f(x)$ γνήσια μονότονη συνάρτηση, $f'(x) \neq 0$

$$\left.\begin{array}{c} f(\xi) = \eta \\ \xi = f^{-1}(\eta) \end{array}\right\} \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(\eta) = 1/f'(\xi)$$

   ή $\frac{df^{-1}(\eta)}{d\eta} = \frac{d\xi}{d\eta} = \frac{1}{d\eta/d\xi} = \frac{1}{df(\xi)/d\xi}$

   □ *Απόδ* ($\mathfrak{Heine}$):

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi \leftrightsquigarrow f(x_n) = y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \eta = f(\xi)$$

$$y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \eta \leftrightsquigarrow f^{-1}(y_n) = x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi = f^{-1}(\eta)$$

$$\frac{f^{-1}(\eta) - f^{-1}(y_n)}{\eta - y_n} = \frac{\xi - x_n}{f(\xi) - f(x_n)} = \frac{1}{\dfrac{f(\xi) - f(x_n)}{\xi - x_n}}$$

   Παίρνουμε το όριο $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi \rightsquigarrow y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \eta$ □

Παραγωγίσεις Παραμετρικών μορφών συναρτήσεων

Μια καμπύλη περιγράφεται είναι με μια συνάρτηση $y = f(x)$ είτε με μια παραμετρική συνάρτηση των συντεταγμένων πχ.

$$x = X(t), \quad y = Y(t)$$

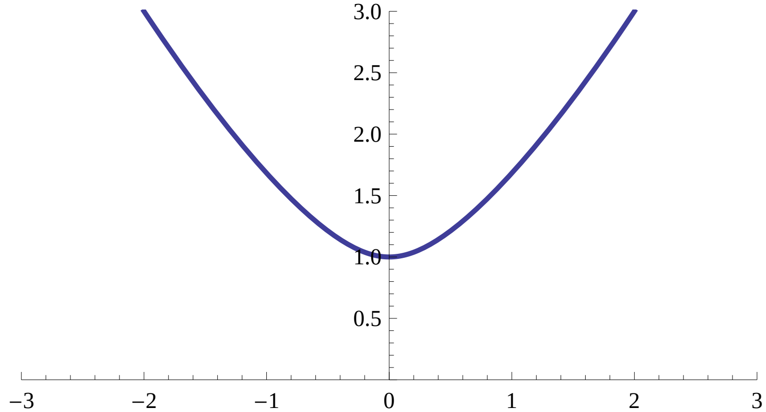
Θέτουμε $y = f(x)$ και $y' = f(x')$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}} = \lim_{x' \to x} \frac{y' - y}{x' - x} = \lim_{t' \to t} \frac{\frac{y'-y}{t'-t}}{\frac{x'-x}{t'-t}} = \frac{\lim\limits_{t' \to t} \frac{y'-y}{t'-t}}{\lim\limits_{t' \to t} \frac{x'-x}{t'-t}} = \boxed{\frac{dy/dt}{dx/dt}}$$

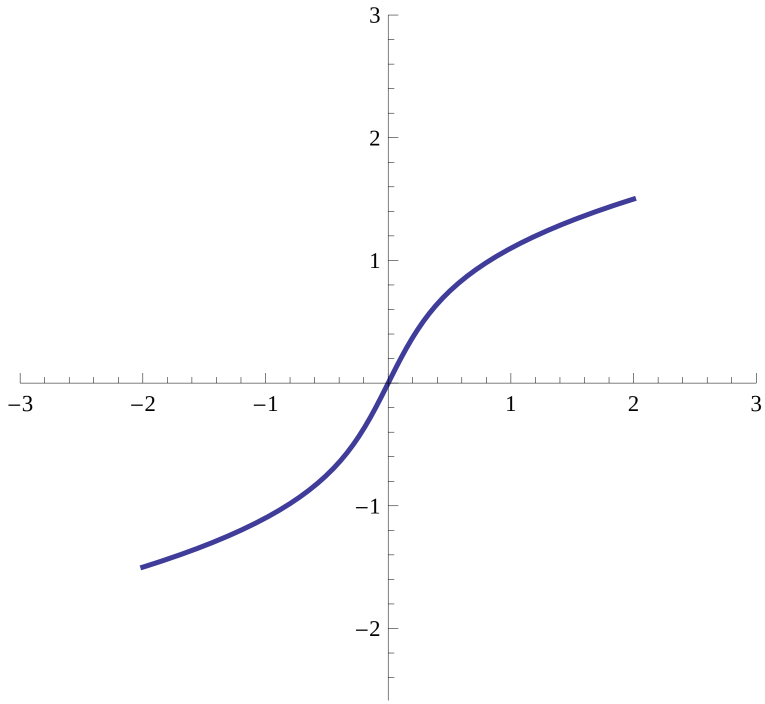
$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \boxed{\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)}{\frac{dx}{dt}}}$$

Παράδειγμα

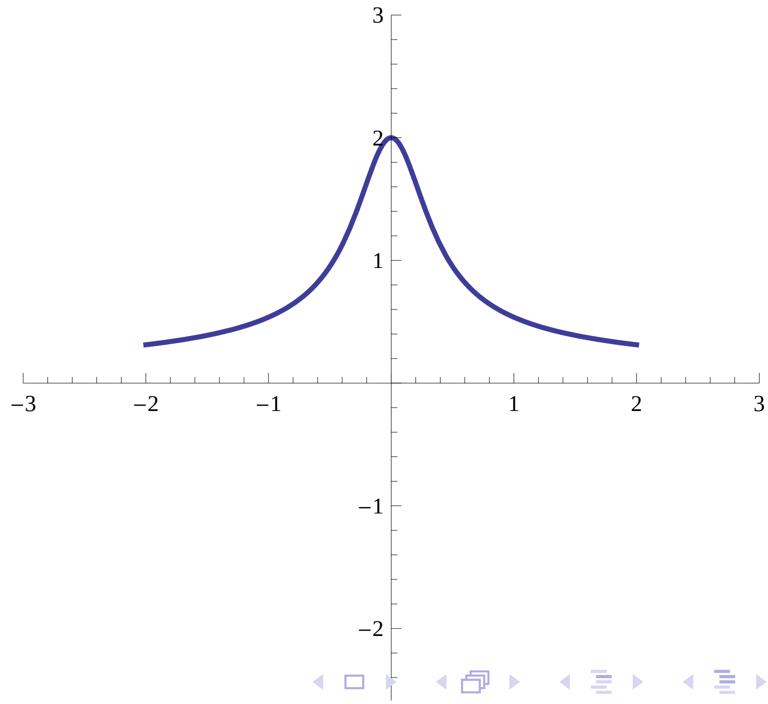
$$\left\{x = t^3 + t, \quad y = t^4 + t^2 + 1, \quad -1 < t < 1\right\}$$



$$\left\{x = t^3 + t, \ \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{4\,t^3 + 2\,t}{3\,t^2 + 1}, \quad -1 < t < 1\right\}$$

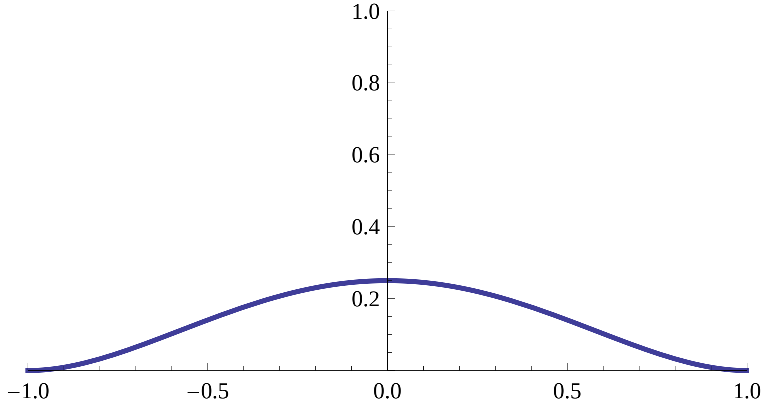


$$\left\{x = t^3 + t, \ \frac{d^2\,y}{\mathrm{dx}^2} = \frac{\frac{12\,t^2+2}{3\,t^2+1} - \frac{6\,t\left(4\,t^3+2\,t\right)}{\left(3\,t^2+1\right)^2}}{3\,t^2 + 1}, \quad -1 < t < 1\right\}$$

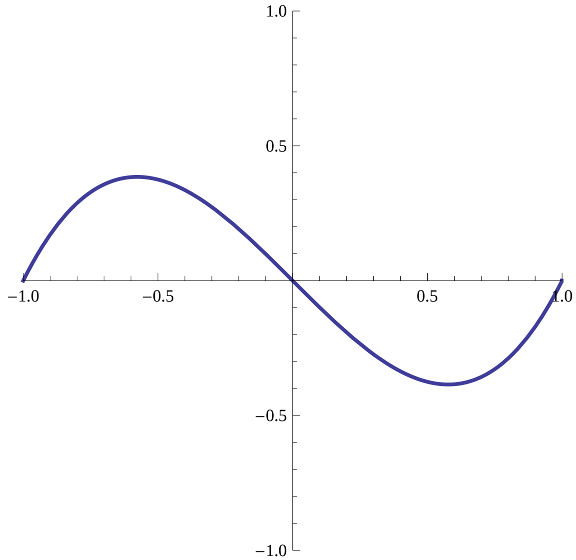


Παράδειγμα

$$\left\{x = \sin(t), \quad y = \frac{\cos^4(t)}{4}, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right\}$$



$$\left\{x = \sin(t), \ \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \sin(t)\left(-\cos^2(t)\right), \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right\}$$



,

$$\left\{x = \sin(t), \ \frac{d^2\,y}{\mathrm{dx}^2} = 2\sin^2(t) - \cos^2(t), \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right\}$$