$$\left\{ f(x) \ \text{ομοιόμορφα συνεχής στο } \mathbb{I} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0, \\ \exists\, \delta\,(\epsilon) > 0 \ : \ \forall\, x, \xi \in \mathbb{I}, \ |x - \xi| < \delta\,(\epsilon, \xi) \leadsto |f(x) - f(\xi)| < \epsilon \end{array} \right\}$$

$$\left\{ f(x) \ \boxed{\text{ΜΗ}} \ \text{ομοιόμορφα συνεχής} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \exists\, \epsilon > 0, \ \forall\, \delta > 0 \ : \\ \exists\, x, \xi \in \mathbb{I}, \ |x - \xi| < \delta \ \leadsto |f(x) - f(\xi)| \geq \epsilon \end{array} \right\}$$

Πρόταση

$$\left\{ f(x) \ \text{ συνεχής στο } \ [a,\, b] \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ f(x) \ \text{ ομοιόμορφα συνεχής στο } \ [a,\, b] \right\}$$

Πρόταση

$$\Big\{ f(x) \ \text{συνεχής στο} \ \ [a,\, b] \Big\} \ \Rightarrow$$

$$\Big\{ f(x) \ \text{ομοιόμορφα συνεχής στο} \ \ [a,\, b] \Big\}$$

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι η $f(x)$ ΔΕΝ είναι ομοιόμορφα συνεχής αλλά είναι ΜΟΝΟ απλά συνεχής στο $[a,\, b]$.
όχι ομοιόμορφα συνεχής $\Rightarrow$

$$\exists\, \epsilon_0 \ : \ \forall\, \delta_0 \,\exists\, x_0,\, y_0 \ : \ |x_0 - y_0| < \delta_0 \ \Rightarrow \ |f(x_0) - f(y_0)| \geq \epsilon_0$$

$f(x)$ συνεχής $\Rightarrow$

$$\forall\, \epsilon > 0 \,\exists \delta(\epsilon, y_0) \ : \ \forall\, x, \ |x - y_0| < \delta(\epsilon, y_0) \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y_0)| < \epsilon$$

Διαλέγουμε $\epsilon = \epsilon_0/2$ και $\delta_0 = \delta(\epsilon_0/2, y_0)$ οπότε θα πρέπει
$|f(x_0) - f(y_0)| < \epsilon_0/2$ οπότε έχουμε άτοπο □

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Ορισμός συνέχειας Cauchy σε ένα υποσύνολο $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$
πχ $\mathbb{I} = [a,\, b]$ ή $[a,\, \infty)$ ή $(-\infty,\, b]$ κλπ

$$\left\{ \lim_{x \to \xi} f(x) \; = f(\xi) \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall\, x, \xi \in \mathbb{I},\ \forall\, \epsilon > 0\ \exists\ \delta\,(\epsilon, \xi) > 0 \quad : \\ |x - \xi| < \delta\,(\epsilon, \xi) \rightsquigarrow |f(x) - f(\xi)| < \epsilon \end{array} \right\}$$

Ομοιόμορφη συνέχεια $\Leftrightarrow$ $\forall\, \epsilon > 0 \ \rightsquigarrow\ \inf_{\xi \in \mathbb{I}} \delta(\epsilon, \xi) > 0$

πχ $f(x) = \sqrt{x},\ x > 1,\ f(x) = \mathrm{e}^x,\ x \in [0, 1],\ f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1},\ x \in \mathbb{R}$

Ορισμός

$f(x)$ συνάρτηση Lipschitz $\Leftrightarrow$ $\boxed{|f(x)-f(y)| < K\,|x-y|}$

Πρόταση

$f(x)$ συνάρτηση Lipschitz σε ένα διάστημα $\rightsquigarrow$ $f(x)$ ομοιόμορφα συνεχής

πχ Η $f(x) = \mathrm{e}^x$ είναι Lipschitz σε ένα διάστημα $[a,\, b]$ $\rightsquigarrow$ $f(x)$ συνεχής

Η $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ είναι Lipschitz στο $\mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ $f(x)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Λήμμα

$$\left\{ \begin{array}{c} f(x) \ \text{συνεχής στο ανοικτό} \\ \text{διάστημα} \quad (a,\, b) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\text{και} \ \left\{ \begin{array}{c} \text{για} \ \ \xi \in (a,\, b) \\ f(\xi) > 0 \end{array} \right\}$$

$$\{\exists\, \delta > 0 \ : \ a < \xi - \delta < x < \xi + \delta < b \ \rightsquigarrow \ f(x) > 0\}$$

Απόδειξη.

☐ *Απόδ*: Για $\epsilon = \dfrac{f(\xi)}{2} \ \exists\, \delta > 0 \ :$

$$a < \xi - \delta < x < x + \delta < b \ \rightsquigarrow \ 0 < \frac{f(\xi)}{2} < f(x) < \frac{3f(\xi)}{2}$$

□

ΟΡΙΑ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$$

Cauchy : $\forall\, R > 0, \quad \exists\, \delta \; : \; |x-\xi| < \delta \rightsquigarrow f(x) > R$

$\mathfrak{Heine}$: $\forall\, x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi \rightsquigarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$$

Cauchy : $\forall\, R > 0\,, \quad \exists\, \delta \; : \; |x-\xi| < \delta \rightsquigarrow f(x) < -R$

$\mathfrak{Heine}$: $\forall\, x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi \rightsquigarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow$$

Cauchy : $\forall\, \epsilon > 0\,, \quad \exists\, r \; : \; x > r \rightsquigarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$

$\mathfrak{Heine}$: $\forall\, x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \rightsquigarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow$$

Cauchy : $\forall\, \epsilon > 0\,, \quad \exists\, r \; : \; x < r \rightsquigarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$

$\mathfrak{Heine}$: $\forall\, x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty \rightsquigarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Πλάγια ασύμπτωτη:

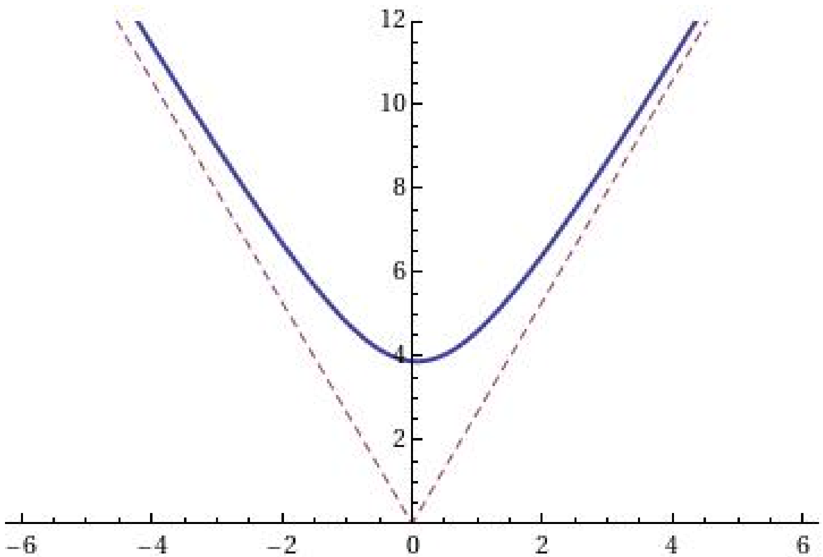
$$\exists \boxed{\alpha \neq 0} \text{ και } \beta : \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - (\alpha x + \beta)\right) = 0$$

ή

$$\exists \boxed{\alpha \neq 0} \text{ και } \beta : \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - (\alpha x + \beta)\right) = 0$$

$$\boxed{\alpha = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}} \quad \boxed{\beta = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - \alpha x\right)}$$

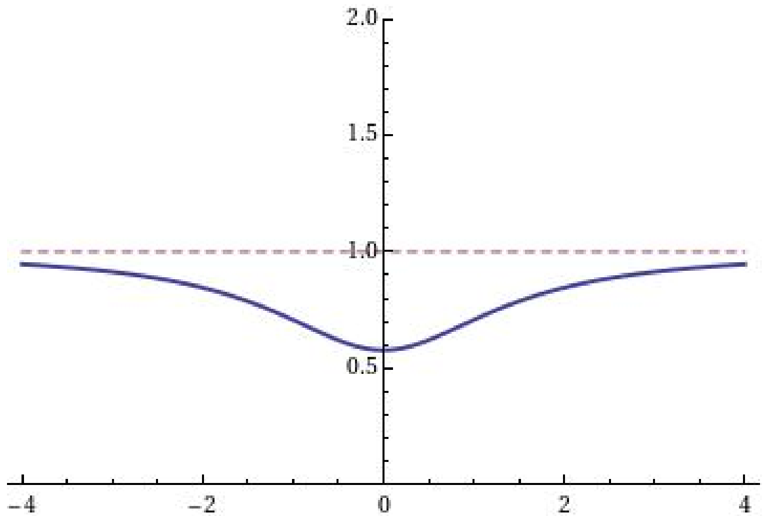
πχ $f(x) = \sqrt{7\,x^2 - x + 15}$



Οριζόντια ασύμπτωτη:

$$\exists\ \beta_+ \ \text{ή/και} \ \ \beta_+ \ \ : \ \ \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-\beta_\pm\right)\ = 0$$

πχ $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$



$$\left\{\mathbb{A} \ \text{φραγμένο σύνολο}\right\} \Leftrightarrow \left\{\exists\, m,\ M\ :\ x \in \mathbb{A} \ \rightsquigarrow\ m \leq x \leq M\right\}$$
$$\Leftrightarrow \left\{\exists\, K\ :\ \forall\, x \in \mathbb{A} \ \rightsquigarrow\ |x| \leq K\right\}$$

$$\left\{\mathbb{A} \ \text{ΜΗ φραγμένο σύνολο}\right\} \Leftrightarrow \left\{\forall\, K\ :\ \exists\, x \in \mathbb{A} \ \rightsquigarrow\ |x| > K\right\}$$

Θεώρημα Bolzano - Weierstrass

$$\left\{\mathbb{A} \ \text{φραγμένο απειροσύνολο}\right\} \overset{\text{Bolzano}}{\Longrightarrow} \forall\ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{A} \ \Rightarrow$$
$$\left\{\begin{array}{c} \exists \ \ \text{συγκλίνουσα} \\ \text{υπακολουθία} \ \ \{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \end{array}\right\}$$

Μη φραγμένα σύνολα

$$\left\{\exists\ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{A} \ \text{μονότονη ΜΗ συγκλίνουσα}\right\} \Longleftrightarrow$$
$$\left\{\mathbb{A} \ \underline{\text{ΜΗ}} \ \text{φραγμένο σύνολο}\right\}$$

Συνεχής εικόνα κλειστού διαστήματος

Πρόταση

$$\{f(x) \text{ συνεχής στο κλειστό διάστημα } \mathbb{I} = [a,\, b]\} \Rightarrow$$
$$\left\{f(\mathbb{I}) \text{ φραγμένο σύνολο}\right\} \Rightarrow \left\{\exists\, m \le M \;:\; x \in \mathbb{I} \rightsquigarrow m \le f(x) \le M\right\}$$

Πρόταση

$$\left\{\begin{array}{c} f(x) \text{ συνεχής στο κλειστό} \\ \text{διάστημα } \mathbb{I} = [a,\, b] \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\left\{\begin{array}{c} \exists\, \xi \in [a,\, b] \;:\; f(\xi) = \min f\left([a,\, b]\right) = m \\ \exists\, \eta \in [a,\, b] \;:\; f(\eta) = \max f\left([a,\, b]\right) = M \end{array}\right\}$$

Συμπέρασμα

Αν $f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση τότε η εικόνα ενός κλειστού διαστήματος είναι ένα κλειστό διάστημα

$$[a,\, b] \xrightarrow[\text{επί}]{f} [m,\, M]$$

Αποδείξεις

Πρόταση

$$\{f(x)\ \text{συνεχής στο κλειστό διάστημα}\ \mathbb{I}=[a,\,b]\}\ \Rightarrow$$
$$\Big\{f(\mathbb{I})\ \ \text{φραγμένο σύνολο}\Big\} \Rightarrow \Big\{\exists\, m \le M\ :\ x\in\mathbb{I}\ \rightsquigarrow\ m\le f(x)\le M\Big\}$$

Απόδειξη.

<u>Εστω</u> $\Big\{f(\mathbb{I})$ ΜΗ φραγμένο σύνολο$\Big\} \Rightarrow\ \exists\, y_n \in f(\mathbb{I})$ <u>μονότονη</u> ΜΗ φραγμένη και $y_n = f(x_n),\ x_n \in \mathbb{A}$, η y_n δεν συγκλίνει

$$\Big\{\mathbb{I}\ \ \text{φραγμένο σύνολο}\Big\} \overset{\text{Bolzano}}{\Longrightarrow} \forall\, x_n \in \mathbb{I}\ \rightsquigarrow\ \left\{\begin{array}{c}\exists\ \text{συγκλίνουσα}\\ \text{υπακολουθία}\ \ x_{n_k}\end{array}\right\}$$

$$\text{Επειδή}\ \ \mathbb{I}=[a,\,b]\ \ \text{φραγμένο σύνολο}\ \rightsquigarrow\ \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi \in \mathbb{I}$$

$$\overset{f\ \text{συνεχής}}{\Longrightarrow} \boxed{\exists\ \lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right)}$$

Αρα η υπακολουθία $y_{n_k} = f\left(x_{n_k}\right)$ μιας μονότονης ακολουθίας συγκλίνει $\Rightarrow$ $\exists\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ πράγμα άτοπο, δηλαδή $f(\mathbb{I})$ είναι φραγμένο σύνολο.

$$m = \inf\ f\left([a,\,b]\right), \quad M = \sup\ f\left([a,\,b]\right)$$

□

Πρόταση

$$\left\{ \begin{array}{c} f(x) \ \text{συνεχής στο κλειστό} \\ \text{διάστημα} \ \ \mathbb{I} = [a,\, b] \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \exists\, \xi \in [a,\, b] \ : \ f(\xi) = \min\, f\left([a,\, b]\right) \\ \exists\, \eta \in [a,\, b] \ : \ f(\eta) = \max\, f\left([a,\, b]\right) \end{array} \right\}$$

Απόδειξη.

Εστω $M = \sup\, f\left([a,\, b]\right)$, τότε

$$\forall\, x \in [a,\, b] \ \rightsquigarrow \ f(x) \leq M \ \Rightarrow$$

$$\rightsquigarrow \{\exists\, x_n \in [a, b] \ : \ M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M\} \ \rightsquigarrow \ \lim_{n\to\infty} f(x_n) \ = M$$

$$\text{Weierstrass} \ \rightsquigarrow \exists\, x_{n_k} \ : \ \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \ = \xi$$

συνέχεια $\rightsquigarrow \ \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \ = f(\xi)$

κάθε υπακολουθία $f(x_{n_k})$ της συγκλίνουσας ακολουθίας $f(x_n)$ έχει το ίδιο όριο, δηλαδή $\rightsquigarrow f(\xi) = M$. Αρα $M = \max f(\mathbb{I})$ $\square$

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΜΟΝΟΤΟΝΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Πρόταση

$$\left\{ f(x) \text{ συνεχής στο } [a,\, b] \; \boxed{\text{ΚΑΙ}} \; f(x) \text{ γνήσια αύξουσα/φθίνουσα} \right\}$$
$$\Rightarrow \left\{ \exists\, f^{-1} \text{ γνήσια αύξουσα/φθίνουσα και συνεχής} \right\}$$

Πρόταση

$$\left\{ f(x) \text{ συνεχής στο } [a,\, b] \; \boxed{\text{ΚΑΙ}} \; f(x) \text{ αμφιμονότιμη δηλ. } \exists\, f^{-1} \right\}$$
$$\Rightarrow \left\{ f(x) \text{ γνήσια αύξουσα/φθίνουσα} \right\}$$

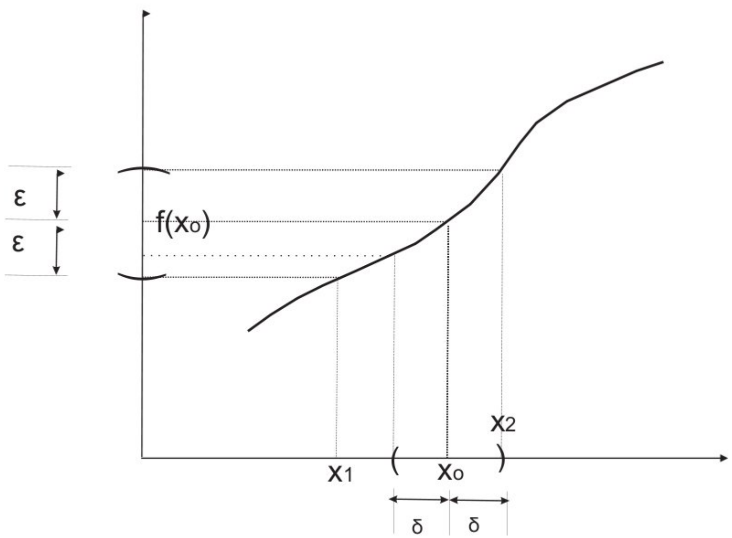
Πρόταση

$$\left\{ f(x) \text{ γνήσια αύξουσα/φθίνουσα} \; \boxed{\text{ΚΑΙ}} \; \exists\, f^{-1} \right\}$$
$$\Rightarrow \left\{ f(x) \text{ συνεχής στο } [a,\, b] \right\}$$

Πρόταση

$$\left\{\begin{array}{c} f(x)\ \text{γνήσια αύξουσα/φθίνουσα} \\ f(x)\ \text{αμφιμονότιμη δηλ.}\ \exists\, f^{-1} \\ \text{και}\ \ [a,\, b] \xrightarrow[\text{επί}]{f} [m,\, M] \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ f(x)\ \text{συνεχής στο}\ [a,\, b] \right\}$$



ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΜΟΝΟΤΟΝΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ- Αποδείξεις

Πρόταση

$$\left\{\begin{array}{c} f(x) \text{ συνεχής στο } [a,\,b] \\ f(x) \text{ γνήσια αύξουσα/φθίνουσα} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \exists\, f^{-1} \\ \text{γνήσια αύξουσα/φθίνουσα} \\ \text{και συνεχής} \end{array}\right\}$$

Απόδειξη.

(Απόδειξη με $\mathfrak{Heine}$)

Βήμα i: $f(x)$ γνήσια αύξουσα στο $[a,\,b] \Rightarrow$

$$a \le x < x' \le b \;\rightsquigarrow$$
$$m = f(a) \le f(x) < f(x') < f(b) = M$$

αν $f(a) < y < f(b)$ Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών $\rightsquigarrow \exists x \in [a,\,b]$ $y = f(x)$

$\rightsquigarrow$ το x ορίζεται μονοσήμαντα από το $y \Rightarrow \boxed{\exists\, f^{-1}}$ και είναι αύξουσα

Βήμα ii: Εστω ότι $y_n \in f([a,\,b])$ είναι μια αύξουσα ακολουθία και $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \eta$ τότε $x_n = f^{-1}(y_n)$ είναι αύξουσα ακολουθία και φραγμένη ($x_n \in [a,\,b]$) οπότε $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi$. Επειδή η $f(x)$ είναι συνεχής θα έχουμε $f(\xi) = \eta$ και επειδή υπάρχει η f^{-1} τότε $\xi = f^{-1}(\eta)$. Δηλαδή $f^{-1}(y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f^{-1}(\eta)$. Οπότε $\lim\limits_{y\to\eta-} f^{-1}(y) = f^{-1}(\eta)$.

Βήμα iii: Με τον ίδιο τρόπο, διαλέγουμε μια φθίνουσα ακολουθία $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \eta$ και βρίσκουμε ότι $f^{-1}(y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f^{-1}(\eta)$. Οπότε $\lim\limits_{y\to\eta+} f^{-1}(y) = f^{-1}(\eta)$.

$\Rightarrow$ $\boxed{f^{-1} \text{ είναι συνεχής}}$ $\square$

Πρόταση

$$\left\{ \begin{array}{c} f(x) \ \text{ συνεχής στο } [a,\, b] \\ f(x) \ \text{ αμφιμονότιμη δηλ. } \exists\, f^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ f(x) \ \text{ γνήσια αύξουσα/φθίνουσα} \right\}$$

Απόδειξη.

Εστω $f(a) < f(b)$ και $a < x_1 < x_2 < b$

Περ. (i) $f(x_1)\big(\text{ ή } f(x_2)\big) < f(a) < f(b)$
Θεώρημα ενδιαμέσου σημείου $\rightsquigarrow$
$\exists\, x_0 \in [x_1,\, b] \ : \ f(x_0) = f(a)$
$x_0 \neq a \rightsquigarrow$ Ατοπο

Περ. (ii) $f(a) < f(b) < f(x_1)\big(\text{ ή } f(x_2)\big)$
Θεώρημα ενδιαμέσου σημείου $\rightsquigarrow$
$\exists\, x_0 \in [a,\, x_1] \ : \ f(x_0) = f(b)$
$x_0 \neq b \rightsquigarrow$ Ατοπο

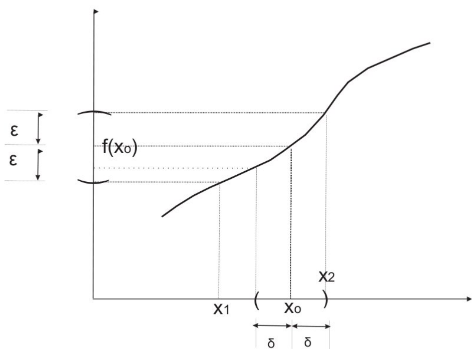
Περ. (iii) $f(a) < f(x_2) < f(x_1) < f(b)$
Θεώρημα ενδιαμέσου σημείου $\rightsquigarrow$
$\exists\, x_0 \in [a,\, x_1] \ : \ f(x_0) = f(x_2)$
$x_0 \neq x_2 \rightsquigarrow$ Ατοπο

Η μόνη περίπτωση που μένει είναι:
$f(a) < f(x_1) < f(x_2) < f(b)$ $\square$

Πρόταση

$$\left\{ \begin{array}{c} f(x) \;\; \text{γνήσια αύξουσα/φθίνουσα} \\ f(x) \;\; \text{αμφιμονότιμη δηλ.}\ \exists\, f^{-1} \\ \text{και} \;\; [a,\, b] \xrightarrow[\text{επί}]{f} [m,\, M] \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ f(x) \;\; \text{συνεχής στο} \;\; [a,\, b] \right\}$$



Απόδειξη.

Εστω $f(x)$ γνήσια αύξουσα, $m = f(a)$ και $M = f(b)$
Εστω $\epsilon > 0$

$$\begin{gathered} y_0 - \epsilon < y_0 < y_0 + \epsilon \;\; \rightsquigarrow \\ x_1 = f^{-1}(y_0 - \epsilon) < x_0 = f^{-1}(y_0) < x_2 = f^{-1}(y_0 + \epsilon) \\ \rightsquigarrow \;\; \delta(\epsilon) = \min\{x_0 - x_1,\, x_2 - x_0\} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} x_1 \le x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \le x_2 \\ y_0 - \epsilon = f(x_1) \le f(x_0 - \delta) < f(x) < f(x_0 + \delta) \le f(x_2) = y_0 + \epsilon \end{gathered}$$

$f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση $\square$