Διάφορες ιδιότητες ακολουθιών

Ιδ. 1 : $a > 0,\ \sqrt[n]{a} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

Ιδ. 2 : $\sqrt[n]{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

Ιδ. 3 : $x_n > 0,\ x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \ \rightsquigarrow\ \sqrt[k]{x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt[k]{x}$

Ιδ. 4 : $P(n) = a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \cdots + a_{p-1} n + a_p,$
$Q(n) = b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \cdots + a_{q-1} n + a_q$

Αν $p = q$ **τότε** $\dfrac{P(n)}{Q(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{a_0}{b_0}$

Αν $p < q$ **τότε** $\dfrac{P(n)}{Q(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

ΥΠΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Ορισμός

Μια επιλογή $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ από $\boxed{\text{άπειρους}}$ όρους της ακολουθίας, με $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ ονομάζεται $\boxed{\text{υπακολουθία}}$ της $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$
\begin{array}{cccccccccc}
(x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & x_8, & x_9, & \ldots) \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
(\cancel{x_1} & x_2, & x_3, & \cancel{x_4} & \cancel{x_5} & x_6, & x_7, & \cancel{x_8} & x_9, & \ldots) \\
 & \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
(& x_{n_1}, & x_{n_2}, & & & x_{n_3}, & x_{n_4}, & & x_{n_5}, & \ldots) \\
 & \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
(& y_1, & y_2, & & & y_3, & y_4, & & y_5, & \ldots)
\end{array}
$$

Σημείωση για τους δείκτες: $\boxed{k \leq n_k}$

Υπακ.1:

$\boxed{x_n \text{ συγκλίνει στο } x} \Leftrightarrow \boxed{\text{κάθε υπακολουθία } y_k = x_{n_k} \text{ συγκλίνει στο } x}$

Παράδειγμα: $\{\sqrt[n]{n} \to 1\} \rightsquigarrow \left\{\sqrt[n^2]{n^2} \to 1\right\}$

Θεώρημα Bolzano Weierstrass

Κάθε (άνω και κάτω) φραγμένο απειροσύνολο A έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης

Υπακ. 2:

Κάθε (άνω και κάτω) φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μια συγκλίνουσα υπακολουθία

ΥΠΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Ορισμός

Μια επιλογή $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ από $\boxed{\text{άπειρους}}$ όρους της ακολουθίας, με $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ ονομάζεται $\boxed{\text{υπακολουθία}}$ της $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$
\begin{array}{cccccccccc}
\big(x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & x_8, & x_9, & \ldots\big) \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\big(\boxed{\cancel{x_1}} & x_2, & x_3, & \boxed{\cancel{x_4}} & \boxed{\cancel{x_5}} & x_6, & x_7, & \boxed{\cancel{x_8}} & x_9, & \ldots\big) \\
 & \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
\big(& x_{n_1}, & x_{n_2}, & & & x_{n_3}, & x_{n_4}, & & x_{n_5}, & \ldots\big) \\
 & \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
\big(& y_1, & y_2, & & & y_3, & y_4, & & y_5, & \ldots\big)
\end{array}
$$

Σημείωση για τους δείκτες: $\boxed{k \le n_k}$

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \rightsquigarrow \exists\, m \in \mathbb{N} \;:\; \{k \le m\} \bigwedge \{n_k \le m\}$$
$$\forall\, m \in \mathbb{N} \rightsquigarrow \exists\, k \in \mathbb{N} \;:\{m \le n_k\}$$
$$\boxed{k \ge m \;\Rightarrow\; n_k \ge m}$$

Υπακ.1:

$$\boxed{x_n \text{ συγκλίνει στο } x} \Leftrightarrow \boxed{\text{κάθε υπακολουθία } y_k = x_{n_k} \text{ συγκλίνει στο } x}$$

Παράδειγμα: $\{\sqrt[n]{n} \to 1\} \rightsquigarrow \left\{\sqrt[n^2]{n^2} \to 1\right\}$

Υπακ.1:

$$\boxed{\boxed{\begin{array}{c}x_n \text{ συγκλίνει}\\ \text{στο } x\end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{κάθε υπακολουθία}\\ y_k = x_{n_k}\\ \text{συγκλίνει στο } x\end{array}}}$$

Παράδειγμα: $\{\sqrt[n]{n} \to 1\} \rightsquigarrow \left\{\sqrt[n^2]{n^2} \to 1\right\}$

$\square$ *Απόδ*:

$$\left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\forall\,\epsilon > 0,\ \exists\, N(\epsilon) > 0\ :\\ k > N(\epsilon)\ \rightsquigarrow\ |x_k - x| < \epsilon\end{array}\right\}$$

Επειδή $n_k \geq k > N(\epsilon)$ τότε $|x_{n_k} - x| < \epsilon$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c}\forall\,\epsilon > 0,\ \exists\, N(\epsilon) > 0\ :\\ n_k > N(\epsilon)\ \rightsquigarrow\ |x_{n_k} - x| < \epsilon\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\square$

Θεώρημα Bolzano Weierstrass

$\boxed{\text{Κάθε (άνω και κάτω) φραγμένο απειροσύνολο } A \text{ έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης}}$

$$\Downarrow$$

Υπ. 2

Κάθε (άνω και κάτω) φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μια συγκλίνουσα υπακολουθία

□ *Απόδ*:

▶ Αν η ακολουθία έχει μια απειρία από σταθερούς όρους τότε διαλέγουμε την υπακολουθία από τους σταθερούς όρους και είναι συκλίνουσα

▶ αν η ακολουθία έχει άπειρους μη ίσους όρους τότε έχουμε ένα φραγμένο απειροσύνολο ⇒ υπάρχει ένα σημείο συσσώρευσης x ⇒

$$\exists\, n \in \mathbb{N},\ \exists x_{k_n}\ :\ x - \frac{1}{n} < x_{k_n} < x + \frac{1}{n}$$

Αρα $x_{k_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. □

ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

x_n είναι $\boxed{\text{αύξουσα ακολουθία}}$ $\Leftrightarrow x_n \leq x_{n+1}$

x_n είναι $\boxed{\text{φθίνουσα ακολουθία}}$ $\Leftrightarrow x_n \geq x_{n+1}$

x_n είναι x_n είναι $\boxed{\text{μονότονη ακολουθία}}$ $\Leftrightarrow$ φθίνουσα ή αύξουσα ακολουθία

Μον. 1α

x_n είναι αύξουσα και φραγμένη ακολουθία $\Rightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sup\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

□ *Απόδ*: Εχουμε $x_n \leq x_{n+1} \leq K$. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις, *είτε* υπάρχει κάποιος δείκτης ℓ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq \ell \rightsquigarrow x_n = L \in \mathbb{R}$, στην περίπτωση αυτή

$$L = \lim_{k\to\infty} x_k = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$$

είτε η ακολουθία έχει απειρους διαφορετικούς όρους. Εστω $\mathbb{R} \ni M = \sup\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (υπάρχει το M λόγω του αξιώματος III του συνόλου $\mathbb{R}$!) τότε από τον ορισμό του sup

$$\forall \epsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N} \,:\, m - \epsilon < x_k \leq m$$

$$x_n \ \text{ αύξουσα } \ \Rightarrow \forall n > k \rightsquigarrow x_k \leq x_n \leq m < m + \epsilon \Rightarrow$$

Επομένως

$$\forall \epsilon > 0, \exists k = N(\epsilon) \,:\, n > N(\epsilon) \rightsquigarrow m - \epsilon < x_n < m + \epsilon$$

άρα $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} m$ □

Μον. 1β

x_n είναι φθίνουσα και φραγμένη ακολουθία $\Rightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \inf\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$

Μον. 2

x_n είναι μονότονη ακολουθία και έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \Rightarrow$ η ακολουθία x_n συγκλίνει στο ίδιο όριο δηλ $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$

Απόδειξη.

Η υπακολουθία x_{n_k} είναι μια μονότονη (πχ αύξουσα) ακολουθία, επομένως $x = \sup_{k\in\mathbb{N}}\{x_{n_k}\}$. Το x είναι επίσης supremum της υπαακολουθίας x_{n_k} (βλ. Μον. 1α). Θέτουμε $A = \{x_{n_k},\ k \in \mathbb{N}\}$ και $B = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, $\forall z \in A \rightsquigarrow z \in B$ επομένως $z \leq \sup\, B$ δηλαδή $x = \sup\, A \leq \sup\, B$. Αν $\sup\, A < \sup\, B \rightsquigarrow \exists\, \ell \,:\, x_\ell > x$ αλλά τότε υπάρχει κάποιο m έτσι ώστε $x_{n_m} \geq x_\ell > x$ πράγμα άτοπο. Οπότε $\sup\, A = \sup\, B$. □

ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

x_n είναι **αύξουσα ακολουθία** $\Leftrightarrow x_n \leq x_{n+1}$

x_n είναι **φθίνουσα ακολουθία** $\Leftrightarrow x_n \geq x_{n+1}$

x_n είναι **μονότονη ακολουθία** $\Leftrightarrow$ φθίνουσα ή αύξουσα ακολουθία

Μον. 1α: x_n είναι αύξουσα και φραγμένη ακολουθία $\Rightarrow$ $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sup\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

Μον. 1β: x_n είναι φθίνουσα και φραγμένη ακολουθία $\Rightarrow$ $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \inf\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$

Μον. 2: x_n είναι μονότονη ακολουθία και έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x \Rightarrow$ η ακολουθία x_n συγκλίνει στο ίδιο όριο δηλ $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$

- Ορ. $\boxed{x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

$$
\begin{aligned}
x_n = \; & \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \frac{1}{n^\ell} = 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{2!n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3} + \cdots + \frac{1}{n^n} \\
= \; & \sum_{\ell=0}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-\ell+1)}{\ell!\, n^\ell} = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{\ell-1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

- $x_{n+1} > x_n \rightsquigarrow$ αύξουσα ακολουθία

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} = & \sum_{\ell=0}^{n+1} \frac{1}{\ell!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(1-\frac{3}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{\ell-1}{n+1}\right) \\
= & \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(1-\frac{3}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{\ell-1}{n+1}\right) + \\
& + \frac{1}{(n+1)^{n+1}}
\end{aligned}
$$

$$
\left(1-\frac{k}{n+1}\right) > \left(1-\frac{k}{n}\right) \rightsquigarrow x_{n+1} > x_n
$$

- Ορ. $\boxed{y_n = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!}}$
- $y_{n+1} > y_n \rightsquigarrow$ αύξουσα ακολουθία

- $x_n \leq y_n$
- y_n φραγμένη ακολουθία $\rightsquigarrow$ x_n φραγμένη ακολουθία

$$\frac{1}{\ell!} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots \ell} \leq \frac{1}{2^{\ell-1}}$$

$$\begin{aligned} x_n < y_n = & \quad 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \\ = & \quad 1 + \left(1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) < \\ < & \quad 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3 \end{aligned}$$

- $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$ και $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^* \rightsquigarrow \mathrm{e} \leq \mathrm{e}^*$
- $\gamma_{n,k} = \sum_{\ell=0}^{k} \frac{1}{\ell!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{\ell-1}{n}\right)$
- $\gamma_{n,k} \leq x_n \leq \mathrm{e} \rightsquigarrow \gamma_{n,k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y_k \rightsquigarrow$
- $y_k \leq \mathrm{e} \rightsquigarrow \lim_{k\to\infty} y_k = \mathrm{e}^* \leq \mathrm{e}$
- $\mathrm{e} = \mathrm{e}^* \;\leftrightsquigarrow\; \boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=}^{\infty} \frac{1}{k!}}$

- $1 \geq \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-n\frac{1}{n^2} \rightsquigarrow \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$
- $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-1}$
- $k \in \mathbb{N} \rightsquigarrow \left(1+\frac{k}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^k$
- $\left(1+\frac{k}{\ell\, n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{k/\ell}$
- $\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = \mathrm{e}^\alpha = \sup\{e^q,\ q\in\mathbb{Q},\ q\leq\alpha\},\ \alpha>0$

- Ορ. $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $x_{n+1} > x_n$ $\rightsquigarrow$ αύξουσα ακολουθία
- Ορ. $y_n = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!}$, $y_{n+1} > y_n$ $\rightsquigarrow$ αύξουσα ακολουθία,
- $x_n \leq y_n$
- y_n φραγμένη ακολουθία $\rightsquigarrow$ x_n φραγμένη ακολουθία
- $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$ και $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^*$ $\rightsquigarrow$ $\mathrm{e} \leq \mathrm{e}^*$
- $\gamma_{n,k} = \sum_{\ell=0}^{k} \frac{1}{\ell!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{\ell-1}{n}\right)$
- $\gamma_{n,k} \leq x_n \leq \mathrm{e}$ $\rightsquigarrow$ $\gamma_{n,k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y_k$ $\rightsquigarrow$
- $y_k \leq \mathrm{e}$ $\rightsquigarrow$ $\lim_{k\to\infty} y_k = \mathrm{e}^* \leq \mathrm{e}$
- $\mathrm{e} = \mathrm{e}^*$ $\leftrightsquigarrow$ $\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}}$

- $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-1}$
- $\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{k}$
- $\left(1+\dfrac{k}{\ell\, n}\right)^{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{k/\ell}$
- $\left(1+\dfrac{\alpha}{n}\right)^{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{\alpha} = \sup\left\{e^{q},\ q\in\mathbb{Q},\ q\leq\alpha\right\},\ \alpha>0$

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ CAUCHY

Ορισμός

$$\left\{ x_n \ \text{ Cauchy } \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall \epsilon > 0 \, \exists N(\epsilon) \ : \\ \\ \forall n > m > N(\epsilon) \rightsquigarrow |x_n - x_m| < \epsilon \end{array} \right\}$$

$$\left\{ x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} x \right\} \Rightarrow \left\{ x_n \ \text{ Cauchy } \right\}$$

$$\left\{ x_n \ \text{ Cauchy } \right\} \text{ ΚΑΙ } \left\{ x_{n_k} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} x \right\} \Rightarrow \Rightarrow \left\{ x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} x \right\}$$

$$\left\{ x_n \ \text{ Cauchy } \right\} \Rightarrow \left\{ x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} x \right\}$$

Θεώρημα πληρότητας

$$\left\{ x_n \ \text{ Cauchy } \right\} \Leftrightarrow \left\{ x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} x \right\}$$

Θεώρημα πληρότητας

Θεώρημα πληρότητας

$$\left\{ x_n \ \ \text{Cauchy} \ \right\} \Leftrightarrow \left\{ x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} x \right\}$$

$$\left\{ \ x_n \ \boxed{\textbf{δεν}} \ \text{συγκλίνει} \ \right\} \Leftrightarrow \left\{ x_n \ \boxed{\textbf{όχι}} \ \text{Cauchy} \ \right\}$$

$$\exists\, \epsilon, \quad \forall\, N > 0 : \ \exists\, n > m > N \ \rightsquigarrow \ |x_n - x_m| > \epsilon$$

πχ.

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \ \text{δεν συγκλίνει}$$

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \ \text{συγκλίνει}$$

Συστολή ακολουθίας

Αν $|x_{n+1} - x_n| < k|x_n - x_{n-1}|$ και $k < 1$ $\leftrightsquigarrow$ Η x_n είναι συστολή $\Rightarrow$ η x_n είναι Cauchy

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ CAUCHY

Ορισμός

$$\boxed{\left\{x_n \quad \text{Cauchy}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \forall\,\epsilon > 0\ \exists\, N(\epsilon)\ : \\ \\ \forall\, n > m > N(\epsilon) \rightsquigarrow |x_n - x_m| < \epsilon \end{array}\right\}}$$

Πρόταση

$$\boxed{\left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\right\} \Rightarrow \left\{x_n \quad \text{Cauchy}\right\}}$$

Απόδειξη.

$$\left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \forall\,\epsilon > 0 \quad \exists\, N(\epsilon) > 0\ : \\ m > N(\epsilon) \ \rightsquigarrow\ |x - x_m| < \epsilon \end{array}\right\} \rightsquigarrow$$

$$n > m \ \rightsquigarrow\ |x_n - x| < \epsilon$$

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < 2\epsilon = \epsilon' \ \rightsquigarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} \forall\,\epsilon' > 0\ \exists\, N'(\epsilon') = N\left(\frac{\epsilon'}{2}\right)\ : \\ \\ \forall\, n > m > N'(\epsilon') \ \rightsquigarrow\ |x_n - x_m| < \epsilon' \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{x_n \quad \text{Cauchy}\right\} \qquad \square$$

Λήμμα

$\left\{x_n \text{ Cauchy }\right\}$ ΚΑΙ $\left\{x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x\right\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \left\{x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x\right\}$

Απόδειξη.

$$\{x_n \text{ Cauchy }\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0 \, \exists\, N_1(\epsilon) \ : \\ \\ \forall\, n > m > N_1(\epsilon) \ \rightsquigarrow \ |x_n - x_m| < \epsilon \end{array} \right\}$$

$$\left\{x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x\right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0 \, \exists\, N_2(\epsilon) \ : \\ \\ \forall\, k > N_2(\epsilon) \ \rightsquigarrow \ |x_{n_k} - x| < \epsilon \end{array} \right\}$$

Αν $\epsilon' = 2\epsilon$ και $N'(\epsilon') = \max\left\{N_1(\epsilon),\, N_2(\epsilon)\right\}$ τότε $n > n_k > N'(\epsilon') \rightsquigarrow$

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < 2\epsilon = \epsilon'$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall\, \epsilon' > 0 \quad \exists\, N'(\epsilon') > 0 \ : \\ n > N'(\epsilon') \ \rightsquigarrow \ |x - x_n| < \epsilon' \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x\right\}$$

□

Πρόταση

$\boxed{\left\{x_n \text{ Cauchy }\right\} \Rightarrow \left\{x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x\right\}}$

Απόδειξη.

$\left\{x_n \text{ Cauchy }\right\} \Rightarrow$

$$\epsilon = 1 \, \exists\, n_0 > N(1) \ : \ n > n_0 \ \rightsquigarrow$$

$$|x_n| \leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < 1 + |x_{n_0}| \ \rightsquigarrow$$

x_n τελικά φραγμένη $\underset{\text{Bolzano}}{\rightsquigarrow}$ $\exists$ υπακολουθία που συγκλίνει $\underset{\text{Λήμμα}}{\rightsquigarrow}$ x_n συγκλίνει.

□

ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ

$$\boxed{\left\{x_n \ \text{Cauchy}\right\} \Leftrightarrow \left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\right\}}$$

$$\left\{\ x_n \ \boxed{\textbf{δεν}} \ \text{συγκλίνει}\ \right\} \Leftrightarrow \left\{x_n \ \boxed{\textbf{όχι}} \ \text{Cauchy}\ \right\}$$

$$\boxed{\exists\,\epsilon, \quad \forall N > 0:\ \exists\, n > m > N \ \rightsquigarrow \ |x_n - x_m| > \epsilon}$$

πχ.

Πρόταση

$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει

Απόδειξη.

$$x_{2n} - x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} > \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}$$

□

Πρόταση

$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
x_n - x_m = \ & \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq \\
& \leq \tfrac{1}{m(m+1)} + \tfrac{1}{(m+1)(m+2)} + \cdots + \tfrac{1}{n(n-1)} = \\
= \ & \tfrac{1}{m} - \tfrac{1}{m+1} + \tfrac{1}{m+1} - \tfrac{1}{m+2} + \cdots + \tfrac{1}{n-1} - \tfrac{1}{n} \\
= \ & \tfrac{1}{m} \cancel{\tfrac{1}{m+1}} \cancel{\tfrac{1}{m+1}} \cancel{\tfrac{1}{m+2}} + \cdots + \cancel{\tfrac{1}{n-1}} - \tfrac{1}{n} \\
= \ & \tfrac{1}{m} - \tfrac{1}{n} < \tfrac{1}{m}
\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \forall\,\epsilon > 0\ \exists\, N(\epsilon) = \dfrac{1}{\epsilon}\ : \\ \\ \forall\, n > m > N(\epsilon) \ \rightsquigarrow \ |x_n - x_m| < \dfrac{1}{m} < \epsilon \end{array}\right\}$$

□

Πλήρης χώρος $\Leftrightarrow$ **κάθε** ακολουθία Cauchy συγκλίνει

- Το $\mathbb{R}$ είναι πλήρης χώρος
- Το $\mathbb{Q}$ **δεν** είναι πλήρης χώρος

πχ. Η ακολουθία $x_1 = 2,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$

$$x_n \in \mathbb{Q} \ \textbf{αλλά} \ x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Αν γνωρίζουμε μόνο το $\mathbb{Q}$ μπορούμε να πάρουμε το σύνολο ακολουθιών Cauchy και το σύνολο αυτό είναι ένα ολικά διατεταγμένο πεδίο/σώμα που κάθε ταυτίζεται με το $\mathbb{R}$.
$\mathbb{R}=$ Cauchy- πλήρωση του $\mathbb{Q}$

Constructive	Axiomatic
Αξιώματα Peano $\Updownarrow$ $\mathbb{N}$ $\Downarrow$ προσθετική ομάδα $\Downarrow$ $\mathbb{Z}$ $\Downarrow$ πολλαπλασιαστική ομάδα $\Downarrow$ $\mathbb{Q}$ $\Downarrow$ Cauchy- πλήρωση $\Downarrow$ $\mathbb{R}$	Αξιώματα I, II, III $\Updownarrow$ $\mathbb{R}$ $\Downarrow$ μέγιστο 1-hereditary σύνολο $\Updownarrow$ $\mathbb{N}$ $\Downarrow$ προσθετική ομάδα $\Downarrow$ $\mathbb{Z}$ $\Downarrow$ πολλαπλασιαστική ομάδα $\Downarrow$ $\mathbb{Q}$

Πρ. (Stolz)

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \\[2ex] b_k > 0 \quad \textbf{και} \quad \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$$

πχ $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \rightsquigarrow \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

$$\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots\sqrt[n]{n}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} n$$

$$k \in \mathbb{N} \rightsquigarrow \frac{1+2^k+3^k+\cdots n^k}{n^{k+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{k+1}$$

Πρόταση

$$\boxed{\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \Rightarrow \sqrt[n]{|x_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell}$$

π.χ. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^5-3n^3+8} = 1$

Πρ (Stolz):

$$\boxed{\left.\begin{array}{c} \dfrac{a_n}{b_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \\ b_k > 0 \quad \text{και} \quad \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell}$$

□ *Απόδ*:

$$\frac{a_n}{b_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall \epsilon > 0 \quad \exists N_1(\epsilon) > 0 : \\ k > m > N_1(\epsilon) \rightsquigarrow \ell - \epsilon < \dfrac{a_k}{b_k} < \ell + \epsilon \end{array} \right\}$$

$$\rightsquigarrow (\ell - \epsilon)\, b_k < a_k < (\ell + \epsilon)\, b_k$$

$$\rightsquigarrow (\ell - \epsilon) \sum_{k=m+1}^{n} b_k < \sum_{k=m+1}^{n} a_k < (\ell + \epsilon) \sum_{k=m+1}^{n} b_k$$

$$\rightsquigarrow \sum_{k=1}^{m} a_k + (\ell - \epsilon) \sum_{k=m+1}^{n} b_k < \sum_{k=1}^{n} a_k < \sum_{k=1}^{m} a_k + (\ell + \epsilon) \sum_{k=m+1}^{n} b_k$$

$$\rightsquigarrow \left\{ \sum_{k=1}^{m} a_k - (\ell - \epsilon) \sum_{k=1}^{m} b_k \right\} + (\ell - \epsilon) \sum_{k=1}^{n} b_k < \sum_{k=1}^{n} a_k <$$

$$< \left\{ \sum_{k=1}^{m} a_k - (\ell + \epsilon) \sum_{k=1}^{m} b_k \right\} + (\ell + \epsilon) \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$\rightsquigarrow \frac{\left\{ \sum_{k=1}^{m} a_k - (\ell - \epsilon) \sum_{k=1}^{m} b_k \right\}}{\sum_{k=1}^{n} b_k} + (\ell - \epsilon) < \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k} <$$

$$< \frac{\left\{ \sum_{k=1}^{m} a_k - (\ell + \epsilon) \sum_{k=1}^{m} b_k \right\}}{\sum_{k=1}^{n} b_k} + (\ell + \epsilon)$$

Για ένα σταθερό $\epsilon > 0$, διαλέγουμε ένα $m = [N_1(\epsilon)] + 1 > N_1(\epsilon)$, που είναι σταθερό (και εξαρτάται από το ϵ). Τότε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left\{ \sum\limits_{k=1}^{m} a_k - (\ell - \epsilon) \sum\limits_{k=1}^{m} b_k \right\}}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k} + (\ell - \epsilon) \le \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k} \le$$

$$\le \lim_{n\to\infty} \frac{\left\{ \sum\limits_{k=1}^{m} a_k - (\ell + \epsilon) \sum\limits_{k=1}^{m} b_k \right\}}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k} + (\ell + \epsilon)$$

Οι παραστάσεις μεταξύ $\left\{ \cdots \right\}$ δεν εξαρτώνται από το n τότε επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = +\infty$ θά έχουμε ότι για το συγκεκριμένο ϵ

$$(\ell - \epsilon) \le \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k} \le (\ell + \epsilon)$$

Επομένως $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ □

Πρ:

$$\boxed{\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{|x_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell}$$

□ *Απόδ*:

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, N_1(\epsilon) > 0\ : \\ m > N_1(\epsilon) \rightsquigarrow \ell - \epsilon < \dfrac{|x_{m+1}|}{|x_m|} < \ell + \epsilon \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} &\rightsquigarrow (\ell-\epsilon)\,|x_m| < |x_{m+1}| < (\ell+\epsilon)\,|x_m| \\ &\rightsquigarrow (\ell-\epsilon)^k\,|x_m| < |x_{m+k}| < (\ell+\epsilon)^k\,|x_m| \\ &\rightsquigarrow (\ell-\epsilon)^{m+k}\,\tfrac{|x_m|}{(\ell-\epsilon)^m} < |x_{m+k}| < (\ell+\epsilon)^{m+k}\,\tfrac{|x_m|}{(\ell+\epsilon)^m} \end{aligned}$$

Για $n = m + k > m$ έχουμε

$$\begin{aligned} &\rightsquigarrow (\ell-\epsilon)^n\,\tfrac{|x_m|}{(\ell-\epsilon)^m} < |x_n| < (\ell+\epsilon)^n\,\tfrac{|x_m|}{(\ell+\epsilon)^m} \\ &\rightsquigarrow (\ell-\epsilon)\,\sqrt[n]{\tfrac{|x_m|}{(\ell-\epsilon)^m}} < \sqrt[n]{|x_n|} < (\ell+\epsilon)\,\sqrt[n]{\tfrac{|x_m|}{(\ell+\epsilon)^m}} \\ &\rightsquigarrow (\ell-\epsilon)\,\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\tfrac{|x_m|}{(\ell-\epsilon)^m}} \le \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|} \le (\ell+\epsilon)\,\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\tfrac{|x_m|}{(\ell+\epsilon)^m}} \\ &\rightsquigarrow (\ell-\epsilon) \le \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|} \le (\ell+\epsilon) \end{aligned}$$

Επομένως $\sqrt[n]{|x_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ □

ΑΠΟΚΛΙΝΟΥΣΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Ορισμός

$$\left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \forall\, R > 0,\ \exists\, N(R) > 0\ : \\ \\ n > N(R)\ \rightsquigarrow\ x_n > R \end{array}\right\}$$

Κάθε αύξουσα μη φραγμένη ακολουθία αποκλίνει

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \ \rightsquigarrow\ \frac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ορισμός

$$\left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \forall\, R > 0,\ \exists\, N(R) > 0\ : \\ \\ n > N(R)\ \rightsquigarrow\ x_n < -R \end{array}\right\}$$

Κάθε φθίνουσα μη φραγμένη ακολουθία αποκλίνει

1. x_n συγκλίνει $\Leftrightarrow$ x_n είναι ακολουθία Cauchy

2. $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \;\Rightarrow\; \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη $\;\Leftrightarrow$
$\exists C > 0 : \forall n \rightsquigarrow |x_n| < C$

3. $|a| < 1 \;\Rightarrow\; a^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

4. (Συστολή) $x_n \neq 0,\ |\frac{x_{n+1}}{x_n}| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} k < 1 \rightsquigarrow x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

5. $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \Rightarrow$ Καθε υπακολουθία x_{n_k} συγκλίνει στο x

6. (Bolzano-Weierstrass): Κάθε (άνω και κάτω) φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μια συγκλίνουσα υπακολουθία

7. x_n είναι αύξουσα και φραγμένη ακολουθία $\Rightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sup\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

8. x_n είναι μονότονη ακολουθία και έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x \Rightarrow$ η ακολουθία x_n συγκλίνει στο ίδιο όριο δηλ $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$

9. $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{x^\ell}{\ell!}$$

10. (Stolz): $$\left\{\begin{array}{c} \dfrac{a_n}{b_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \\[2ex] b_k > 0 \quad \text{και} \quad \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$$

11. $$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{|x_n|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$$

ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΕΙΡΑΣ

Ορισμός

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ "μερικό" άθροισμα,

Αν $S_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S$ τότε "συγκλίνει απλά η σειρά" $S \equiv \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \Leftrightarrow$ η ακολουθία S_N είναι Cauchy

$$\Leftrightarrow \quad \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, N(\epsilon)\ :\ \forall\, n > m > N(\epsilon)\ \rightsquigarrow\ |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \epsilon$$

Πρόταση

συγκλίνει απλά η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

ΠΡΟΣΟΧΗ:

Αν $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ τότε **ΔΕΝ ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ ΠΑΝΤΑ** η σειρά $\sum\limits_{n} a_n$

πχ. $a_n = \dfrac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ αλλά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

Ορισμός

“συγκλίνει απόλυτα η σειρά” $\Leftrightarrow$ συγκλίνει η σειρά των απόλυτων τιμών $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

Πρόταση

Απόλυτη σύγκλιση σειράς $\Rightarrow$ Απλή σύγκλιση σειράς

Κριτήριο Σύγκρισης (Comparison test)

$|b_n| \leq a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει

Πρόταση

$0 \leq a_n \leq b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ αποκλίνει $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ αποκλίνει

Κριτήριο των λόγων (Ratio test)

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

1. συγκλίνει απόλυτα αν $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$
2. αποκλίνει αν $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$
3. δεν μπορούμε να αποφασίσουμε αν $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

Κριτήριο των ριζών (Root test)

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

1. συγκλίνει απόλυτα αν $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$
2. αποκλίνει αν $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$
3. δεν μπορούμε να αποφασίσουμε αν $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$

Λόγος ακολουθιών

a_n και b_n θετικές ακολουθίες. Αν $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \ell \neq 0$ τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{υπάρχει} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{υπάρχει}$$

Μηδενικός Λόγος ακολουθιών

a_n και b_n θετικές ακολουθίες. Αν $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{υπάρχει} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{υπάρχει}$$

Κριτήριο συμπύκνωσης (Condensation test)

Αν $0 < a_{n+1} < a_n$ φθίνουσα θετική ακολουθία τότε:

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ υπάρχει } \right\} \Leftrightarrow \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ υπάρχει } \right\}$$

Παραδείγματα:

$$p > 1 \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty$$

$$p > 1 \rightsquigarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln\, n)^p} < \infty$$

Κριτήριο σύγκλισης εναλλασσομένης σειράς (Alternating Series Test)

Αν $0 < a_{n+1} < a_n$ φθίνουσα θετική ακολουθία και $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ τότε:

$$\Rightarrow \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \text{ υπάρχει } \right\}$$

Αναδιάταξη των Φυσικών αριθμών

$$(1, 2, \ldots, k, \ldots) \xrightarrow{\sigma} (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, \ldots)$$

$$\forall\, \sigma_k \;\exists\, n_k \in \mathbb{N} \;:\; \max\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_k\} < n_k$$

Αναδιάταξη ακολουθίας $b_m = a_{\sigma_m}$

Αν η σειρά $\sum_n a_n$ συγκλίνει απόλυτα τότε κάθε αναδιάταξη της σειράς $\sum_n b_n$ συγκλίνει απόλυτα στο ίδιο όριο.

ΔΙΠΛΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{14} & \cdots \\
& \diagup & & \diagup & & \diagup & & \cdots \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{24} & \cdots \\
& \diagup & & \diagup & & \diagup & & \cdots \\
a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{34} & \cdots \\
& \diagup & & \diagup & & \diagup & & \cdots \\
a_{41} & & a_{42} & & a_{43} & & a_{44} & \cdots \\
& \diagup & & \diagup & & \diagup & & \cdots
\end{array}$$

Ορισμός

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} = \ell \text{ συγκλίνει απόλυτα } \Leftrightarrow$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}\right) = \ell \text{ συγκλίνει απόλυτα}$$

ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΕΙΡΑΣ

Ορισμός

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ "μερικό" άθροισμα,

Αν $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S$ τότε "συγκλίνει απλά η σειρά" $S \equiv \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Leftrightarrow$ η ακολουθία S_N είναι Cauchy

$$\Leftrightarrow \quad \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, N(\epsilon)\ :\ \forall\, n > m > N(\epsilon)\ \rightsquigarrow\ |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \epsilon$$

Πρόταση

συγκλίνει απλά η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Απόδειξη.

συγκλίνει $\boxed{\text{απλά}}$ η σειρά $\Leftrightarrow$ η ακολουθία μερικών αθροισμάτων είναι Cauchy $\Rightarrow$

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N(\epsilon)\ :\ \forall\, n > N(\epsilon)\ \rightsquigarrow\ |S_n - S_{n-1}| = |a_n| < \epsilon$$

Επομένως $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ □

ΠΡΟΣΟΧΗ:

Αν $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ τότε **ΔΕΝ ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ ΠΑΝΤΑ** η σειρά $\sum_n a_n$

πχ. $a_n = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ αλλά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

Ορισμός

“συγκλίνει απόλυτα η σειρά” $\Leftrightarrow$ συγκλίνει η σειρά των απόλυτων τιμών $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$

Πρόταση

Απόλυτη σύγκλιση σειράς $\Rightarrow$ Απλή σύγκλιση σειράς

Απόδειξη.

{συγκλίνει $\boxed{\text{απόλυτα}}$ η σειρά }$\Leftrightarrow$

$$\left\{\forall\, \epsilon > 0, \quad \exists\, N(\epsilon) \,:\, \forall\, n > m > N(\epsilon) \;\leadsto\; \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \epsilon\right\}$$

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \epsilon \;\leadsto$$

$$\left\{\forall\, \epsilon > 0, \quad \exists\, N(\epsilon) \,:\, \forall\, n > m > N(\epsilon) \;\leadsto\; \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \epsilon\right\}$$

$\square$

Κριτήριο Σύγκρισης (Comparison test)

$|b_n| \leq a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **συγκλίνει** $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ **συγκλίνει**

Απόδειξη.

$$\begin{array}{c}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \\ \textbf{συγκλίνει}\end{array} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0, \quad \exists\, N(\epsilon) : \\ \forall\, n > m > N(\epsilon) \rightsquigarrow \left| \sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \epsilon \end{array} \right\}$$

$$\sum_{k=m+1}^{n} |b_k| \leq \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \rightsquigarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0, \quad \exists\, N(\epsilon) : \\ \forall\, n > m > N(\epsilon) \rightsquigarrow \sum\limits_{k=m+1}^{n} |b_k| < \epsilon \end{array} \right\} \rightsquigarrow \begin{array}{c}\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \\ \textbf{συγκλίνει} \\ \textbf{απόλυτα}\end{array}$$

□

Πρόταση

$0 \leq a_n \leq b_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ **αποκλίνει** $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ **αποκλίνει**

Απόδειξη.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \rightsquigarrow \left\{ \forall\, R > 0,\ \exists\, N(R) > 0 \,:\, n > N(R) \rightsquigarrow \sum_{k=1}^{n} a_k > R \right\}$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \geq \sum_{k=1}^{n} a_k > R \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$$

□

Κριτήριο των λόγων (Ratio test)

Η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

(i) συγκλίνει απόλυτα αν $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$

(ii) αποκλίνει αν $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$

(iii) δεν μπορούμε να αποφασίσουμε αν $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

☐ *Απόδ* (i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \mathfrak{c} < 1$ για $\epsilon = \frac{1-\mathfrak{c}}{2}$, $\exists\, n_0$:

$$n > n_0 \rightsquigarrow |a_{n+1}| < (\mathfrak{c} + \frac{1-\mathfrak{c}}{2})\,|a_n|$$

$$\rightsquigarrow |a_n| < \left(\frac{\mathfrak{c}+1}{2}\right)^n \frac{|a_{n_0}|}{\left(\frac{\mathfrak{c}+1}{2}\right)^{n_0}}$$

Επειδή $\frac{\mathfrak{c}+1}{2} < 1 \rightsquigarrow$ **(κριτήριο σύγκρισης) η σειρά** $\sum\limits_n |a_n|$ **συγκλίνει απόλυτα.**

☐ *Απόδ* (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \mathfrak{f} > 1$ για $\epsilon = \frac{\mathfrak{f}-1}{2}$, $\exists\, n_0$:

$$n > n_0 \rightsquigarrow |a_{n+1}| > (\mathfrak{f} - \frac{\mathfrak{f}-1}{2})\,|a_n|$$

$$\rightsquigarrow |a_n| > \left(\frac{\mathfrak{f}+1}{2}\right)^n \frac{|a_{n_0}|}{\left(\frac{\mathfrak{f}+1}{2}\right)^{n_0}}$$

Επειδή $\frac{\mathfrak{f}+1}{2} > 1 \rightsquigarrow$ **η ακολουθία** a_n **δεν είναι μηδενική** $\rightsquigarrow$ **δεν συγκλίνει η σειρά** $\sum\limits_n a_n$

Κριτήριο των ριζών (Root test)

Η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

(i) συγκλίνει απόλυτα αν $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$

(ii) αποκλίνει αν $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$

(iii) δεν μπορούμε να αποφασίσουμε αν $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$

Κριτήριο συμπύκνωσης (Condensation test)

Αν $0 < a_{n+1} < a_n$ φθίνουσα θετική ακολουθία τότε:

$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right\}$ υπάρχει $\Leftrightarrow \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ υπάρχει} \right\}$

Απόδειξη.

$$
\begin{aligned}
S_{2^{k+1}-1} &= a_1 + \underbrace{(a_2 + a_3)}_{2 \text{ όροι}} + \underbrace{(a_4 + a_5 + a_6 + a_7)}_{4 \text{ όροι}} + \\
&+ \underbrace{(a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15})}_{8 \text{ όροι}} \\
&+ \cdots + \\
&+ \underbrace{(a_{2^k} + a_{2^k+1} + a_{10} + a_{2^k+2} + \cdots + a_{2^{k+1}-1})}_{2^k \text{ όροι}} \leq \\
&\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots + 2^k a_{2^k} = T_k
\end{aligned}
$$

η ακολουθία T_k συγκλίνει $\Rightarrow$ η υπακολουθία $S_{2^{k+1}-1}$ συγκλίνει και η ακολουθία S_n είναι αύξουσα $\rightsquigarrow$ η S_n συγκλίνει.

$$
\begin{aligned}
\frac{T_k}{2} &= \frac{a_1}{2} + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{k-1} a_{2^k} \leq \\
&\leq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \\
&+ \cdots + \\
&+ (a_{2^{k-1}+1} + a_{2^{k-1}+2} + \cdots + a_{2^k}) = S_{2^k}
\end{aligned}
$$

η ακολουθίαS_n συγκλίνει και είναι αύξουσα $\Rightarrow$ η υπακολουθία S_{2^k} συγκλίνει $\Rightarrow$ η ακολουθία T_k συγκλίνει. $\square$

πχ $\sum_{n=2} \frac{1}{n \ln n}$ δεν συγκλίνει

$\sum_{n=2} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ συγκλίνει

$\sum_{n=1} \frac{1}{n^r}$ συγκλίνει για $r > 1$,

δεν συγκλίνει για $r \leq 1$

Κριτήριο σύγκλισης εναλλασσομένης σειράς (Alternating Series Test)

Αν $0 < a_{n+1} < a_n$ φθίνουσα θετική ακολουθία και $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ τότε:

$\Rightarrow \left\{ \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \text{ υπάρχει} \right\}$

Απόδειξη.

$$
\begin{aligned}
& S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k \\
& S_{m+2} - S_m = (-1)^{m+3} a_{m+2} - (-1)^{m+2} a_{m+1} = (-1)^{m+2}(a_{m+1} - a_{m+2}) \rightsquigarrow \\
& |S_{m+2} - S_m| = a_{m+1} - a_{m+2} \geq 0 \\
& |S_{m+4} - S_{m+2}| = a_{m+3} - a_{m+4} \\
& |S_{m+6} - S_{m+4}| = a_{m+5} - a_{m+6} \\
& \ldots\ldots\ldots \\
& |S_{m+2p} - S_{m+2(p-1)}| = a_{m+2p-1} - a_{m+2p} \\
& |S_{m+2p} - S_m| \leq \\
& \leq |S_{m+2p} - S_{m+2p-2}| + |S_{m+2p-2} - S_{m+2p-4}| + \cdots + |S_{m+2} - S_m| \\
& |S_{m+2p} - S_m| \leq \\
& \leq a_{m+2p-1} - a_{m+2p} + a_{m+2p-3} - a_{m+2p-2} + \cdots + a_{m+3} - a_{m+4} + a_{m+1} - a_{m+2} \\
& |S_{m+2p} - S_m| \leq a_{m+1} - a_{m+2p} < a_{m+1} \\
& |S_{m+2p+1} - S_m| \leq |S_{m+2p+1} - S_{m+2p}| + |S_{m+2p} - S_m| \leq a_{m+2p+1} + a_{m+1} - a_{m+2p} < a_{m+1} \\
& n > m \ \rightsquigarrow \ |S_n - S_m| < a_{m+1}
\end{aligned}
$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \ \rightsquigarrow$$

$$\forall\, \epsilon > 0 \; \exists\, N(\epsilon) \ : \ m > N(\epsilon) \rightsquigarrow a_{m+1} < a_m < \epsilon$$

$$\rightsquigarrow \ |S_n - S_m| < \epsilon \ \rightsquigarrow \ S_n \ \text{ Cauchy}$$

□

πχ $\sum\limits_n \dfrac{(-1)^n}{n}$ συγκλίνει

$\sum\limits_n \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$ συγκλίνει

$\sum\limits_n (-1)^n \sin \dfrac{\pi}{n}$ συγκλίνει

Σύγκλιση αναδιατεταγμένης σειράς

Αν η σειρά $\sum_n a_n$ συγκλίνει απόλυτα τότε κάθε αναδιάταξη της σειράς $\sum_n b_n$ συγκλίνει απόλυτα στο ίδιο όριο.

Απόδειξη.

Θεωρούμε την αναδιάταξη των Φυσικών αριθμών:

$$(1, 2, \ldots, k, \ldots) \xrightarrow{\sigma} (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, \ldots)$$

$$\forall\, \sigma_k \, \exists\, n_k \in \mathbb{N} \;:\; \max\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_k\} < n_k$$

Εστω τα μερικά αθροίσματα:

$$S_\ell = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_\ell|\,, \quad T_k = |b_1| + |b_2| + \cdots + |b_k|$$

όπου $b_m = a_{\sigma_m}$ επομένως $T_k \leq S_{n_k}$. Η υπακολουθία S_{n_k} συγκλινει δηλαδή είναι μια ακολουθία Cauchy $\rightsquigarrow$ η ακολουθία T_k είναι μια ακολουθία Cauchy, δηλαδή συγκλίνει. Επειδή έχουν αύξουσες ακολουθίες που συγκλίνουν, τότε το όριο της υπακολουθίας είναι και το όριο της ακολουθίας. Αρα

$$T_k \leq S_{n_k} \;\rightsquigarrow\; \lim_{k\to\infty} T_k \leq \lim_{k\to\infty} S_{n_k} \;\rightsquigarrow\; \sum_n b_n \leq \sum_n a_n$$

Η ακολουθία a_n μια αναδιάταξη της ακολουθίας b_n, επομένως

$$\sum_n a_n \leq \sum_n b_n$$

Αρα οι δύο σειρές συγκλίνουν στο ίδιο όριο. □