Ορισμός

Ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \equiv$ λίστα στοιχείων $(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, \ldots)$.
$x_n \equiv$ είναι ο γενικός όρος

Ισοδύναμος ορισμός

Ακολουθία είναι μια απεικόνιση του $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{R}$

$$\mathbb{N} \ni n \xrightarrow{f} f(n) = x_n \in \mathbb{R}$$

- Παράδειγμα: Δίδεται ο γενικός όρος

$$x_n = \frac{1}{n(n+1)} \;\equiv\; \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \ldots\right)$$

- Παράδειγμα: Αναδρομική σχέση

$$x_1 = 1,\; x_n = \frac{n}{2} x_{n-1} \;\rightsquigarrow\; x_n = \frac{n!}{2^{n-1}}$$

- Παράδειγμα: Αναδρομική σχέση Fibonacci

$$x_1 = 1,\; x_2 = 1\; x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$$

▷ Παράδειγμα: Εναλλασσομένη ακολουθία

$$x_n = \begin{cases} -1 & \textbf{γιά} \;\; n = 2k \\ \\ 1 & \textbf{γιά} \;\; n = 2k+1 \end{cases} \qquad \rightsquigarrow$$

$$x_n = (-1)^{n+1} = -\cos n\pi$$

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$$

▷ Παράδειγμα:

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \textbf{γιά} \;\; n = 2k \\ \\ \frac{n-1}{n} & \textbf{γιά} \;\; n = 2k+1 \end{cases}$$

$$x_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1+(-1)^n}{2} + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1-(-1)^n}{2}$$

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{1}{2k}, \frac{2k}{2k+1}, \ldots\right)$$

Οριακό Σημείο Ακολουθίας

Οριακό Σημείο

x = $\boxed{\textbf{οριακό}}$ **σημείο** της $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\equiv$ Το x είναι σημείο συσσώρευσης της $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **ή** Υπάρχουν άπειροι όροι $= x$

▷ Παράδειγμα: Ακολουθία με γενικό όρο

$$x_n = \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} + \frac{(n+1)\cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}, \quad n\in\mathbb{N}$$

$$\left(1, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{4}, \frac{1}{5}, \frac{7}{6}, \frac{1}{7}, \ldots\right)$$

οριακά σημεία 0 και 1

▷ Παράδειγμα: Ακολουθία με γενικό όρο

$$x_n = 1 + \frac{(n+1)\cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}, \quad n\in\mathbb{N}$$

$$\left(1, \frac{5}{2}, 1, \frac{9}{4}, 1, \frac{13}{6}, 1, \ldots\right)$$

οριακά σημεία 2 και 1

Σύγκλιση ακολουθιών

Ορισμός: ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΑ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ

Η ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο x $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ή $x_n \longrightarrow x$ αν για κάθε περιοχή του x "τελικά" όλοι οι όροι της ακολουθίας περιέχονται σε αυτή

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = x} \equiv \boxed{\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, N(\epsilon) > 0 \,:\, \forall\, n > N(\epsilon) \;\leadsto\; x_n \in B(x,\epsilon)}$$

Εψιλοντικός ορισμός

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = x} \equiv \boxed{\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, N(\epsilon) > 0 \,:\, \forall\, n > N(\epsilon) \;\leadsto\; |x_n - x| < \epsilon}$$

Μιά συγλίνουσα ακολουθία έχει **μόνο** ένα οριακό σημείο.

$$\{\lim_{n\to\infty} x_n = x\} \equiv \{\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, N(\epsilon) > 0 \,:\, \forall\, n > N(\epsilon) \;\rightsquigarrow\; |x_n - x| < \epsilon\}$$

Παράδειγμα:

$$\boxed{x_n = \tfrac{1}{n}} \;\rightsquigarrow\; \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

ΠΡΟΧΕΙΡΟ

$$n > N \;\rightsquigarrow\; |x_n - x| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \boxed{\underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{φθίνουσα;}}} < \boxed{\frac{1}{N} = \epsilon}$$

$$\frac{1}{N} = \epsilon, \quad \boxed{N(\epsilon) = \tfrac{1}{\epsilon}}$$

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \,:\, \forall\, n > N(\epsilon) \;\rightsquigarrow\; |x_n| < \epsilon$$

$$\{\lim_{n\to\infty} x_n = x\} \equiv \{\forall\,\epsilon > 0 \quad \exists\,N(\epsilon) > 0 \,:\, \forall\,n > N(\epsilon) \;\rightsquigarrow\; |x_n - x| < \epsilon\}$$

Παράδειγμα:

$$x_n = \tfrac{1}{n^2+\mathrm{e}^n} \;\rightsquigarrow\; \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

ΠΡΟΧΕΙΡΟ

$$n > N \;\rightsquigarrow\; |x_n - x| = \frac{1}{n^2+\mathrm{e}^n} \le \boxed{\underbrace{\frac{1}{\mathrm{e}^n}}_{\text{φθίνουσα;}}} < \boxed{\frac{1}{\mathrm{e}^N} = \epsilon}$$

$$\frac{1}{\mathrm{e}^N} = \epsilon \;\rightsquigarrow\; N(\epsilon) = \ln \tfrac{1}{\epsilon}$$

$$\forall\,\epsilon > 0\;\exists\,N(\epsilon) = \ln\frac{1}{\epsilon} \,:\; n > N(\epsilon) \;\rightsquigarrow\; |x_n| < \epsilon$$

$$a > 1, \rightsquigarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1}$$

$$1 + x > 0 \rightsquigarrow (1+x)^n \geq 1 + nx \text{ (Bernoulli) } \rightsquigarrow$$

$$a > 1 \rightsquigarrow a = \Bigg(\underbrace{\sqrt[n]{a} - 1}_{x} + 1\Bigg)^n \geq 1 + n\Bigg(\underbrace{\sqrt[n]{a} - 1}_{x}\Bigg) \rightsquigarrow$$

$$\boxed{\sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n}}$$

Πρόχειρο

$$n > N \rightsquigarrow \sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n} < \frac{a-1}{N} = \epsilon \rightsquigarrow \boxed{N(\epsilon) = \frac{a-1}{\epsilon}}$$

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists N(\epsilon) = \tfrac{a-1}{\epsilon} :$$

$$n > N(\epsilon) \rightsquigarrow |\sqrt[n]{a} - 1| \leq \frac{|a-1|}{n} < \frac{|a-1|}{N} = \epsilon$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0}$$

$$\begin{aligned} \frac{n!}{n^n} \quad &= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}{n^n} \\ &= \tfrac{1}{n}\cdot\tfrac{2}{n}\cdot(1-\tfrac{2}{n})\cdot(1-\tfrac{1}{n}) \\ &= \tfrac{1}{n}\cdot\prod_{k=1}^{n-2}\underbrace{\left(1-\frac{k}{n}\right)}_{<1} < \tfrac{1}{n} \end{aligned}$$

Πρόχειρο

$$\frac{n!}{n^n} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \epsilon \ \rightsquigarrow\ N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}$$

$$\forall\,\epsilon > 0\ \exists\, N(\epsilon) = \tfrac{1}{\epsilon}\ :$$

$$n > N(\epsilon) \ \rightsquigarrow\ \left|\frac{n!}{n^n}\right| \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{N(\epsilon)} = \epsilon$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{2^n} = 0}$$

$$2^n = \quad (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \cdots + \binom{n}{4} + \cdots =$$

$$= \cdots + \tfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} + \cdots$$

$$2^n > \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

$$n > 6 \rightsquigarrow n - k > \frac{n}{2} \ \text{για}\ k = 1, 2, 3$$

$$2^n > \frac{n^4}{2^3\, 4!} \rightsquigarrow \frac{2^3 \cdot 4!}{n} > \frac{n^3}{2^n}$$

Πρόχειρο

$$\frac{n^3}{2^n} < \frac{2^3 \cdot 4!}{n} < \frac{2^3 \cdot 4!}{N} = \epsilon \rightsquigarrow N(\epsilon) = \frac{2^3 \cdot 4!}{\epsilon}$$

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, N(\epsilon) = \tfrac{2^3 \cdot 4!}{\epsilon} :$$

$$\forall\, n > N(\epsilon) \rightsquigarrow \left| \tfrac{n^3}{2^n} \right| < \tfrac{2^3 \cdot 4!}{n} < \tfrac{2^3 \cdot 4!}{N(\epsilon)} = \epsilon$$

ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Ορισμός συγκλίνουσας ακολουθίας

$$\{\ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ συγκλίνει στο } x\ \} \Leftrightarrow \{\ \lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ ή } x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\}$$
$$\Leftrightarrow \{\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N(\epsilon) > 0 \ :\ n > N(\epsilon) \ \rightsquigarrow\ |x_n - x| < \epsilon\}$$
$$\Leftrightarrow \{\ \{(x_n - x)\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ μηδενική ακολουθία}\} \Leftrightarrow \left\{\lim_{n\to\infty} (x_n - x) \ = 0\right\}$$

Πρ. 1: $\boxed{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \Rightarrow |x_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |x|}$

Πρ. 1α: $\boxed{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow |x_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0}$

Πρ. 2: $\boxed{x_n \longrightarrow x \ \Rightarrow\ \lambda\, x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda x}$

Πρ. 3: $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \ \Rightarrow\ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη $\Leftrightarrow$
$\exists\, C,\, D \geq 0$ και $N > 0 : \forall\, n > N \ \rightsquigarrow\ D \leq |x_n| < C$

Πρ. 4: $\boxed{\left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \text{ και } y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y\right\} \Rightarrow \left\{x_n + y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x + y\right\}}$

Πρ. 5: $\boxed{\left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \text{ και } y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y\right\} \Rightarrow \left\{x_n \cdot y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \cdot y\right\}}$

Πρ. 6α: $\left\{0 \leq x_n \text{ και } x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\right\} \Rightarrow \{0 \leq x\}$

Πρ. 6β: $\left\{x_n \leq y_n \text{ και } x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x, \quad y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y\right\} \Rightarrow \{x \leq y\}$

Πρ. 7: $\left\{\begin{array}{c} z_n \leq x_n \leq y_n \\ \text{και} \\ z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a, \quad y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a\right\}$

Πρ. 8α: $\left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \text{ και } x \neq 0\right\} \Rightarrow \left\{\frac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x}\right\}$

Πρ. 8β: $\left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x, \; y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y \text{ και } y \neq 0, \right\} \Rightarrow \left\{\frac{x_n}{y_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{x}{y}\right\}$

Πρ. 9α: $\{|a| < 1\} \Rightarrow \left\{a^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\right\}$

Πρ. 9β: $\left\{x_n \neq 0, \; |\frac{x_{n+1}}{x_n}| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} k < 1\right\} \rightsquigarrow \left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\right\}$

ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ-Αποδείξεις

Ορισμός

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ συγκλίνει στο } x$$
$$\Updownarrow$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ ή } x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N(\epsilon) > 0 \,:\, n > N(\epsilon) \ \rightsquigarrow\ |x_n - x| < \epsilon$$

Πρ. 1: $\boxed{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \ \Rightarrow\ |x_n| \longrightarrow |x|}$

☐ *Απόδ*:

$$\{x_n \longrightarrow x\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall \epsilon > 0,\ \exists N(\epsilon) > 0\,: \\ n > N(\epsilon) \ \rightsquigarrow\ |x_n - x| < \epsilon \end{array} \right\}$$

Επειδή $|\,(|x_n| - |x|)\,| \le |x_n - x| < \epsilon$

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall \epsilon > 0,\ \exists N(\epsilon) > 0\,: \\ n > N(\epsilon) \ \rightsquigarrow\ |\,(|x_n| - |x|)\,| \le |x_n - x| < \epsilon \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ |x_n| \longrightarrow |x|$$

☐

Πρ. 2: $\boxed{x_n \longrightarrow x \ \Rightarrow\ \lambda x_n \longrightarrow \lambda x}$

Πρ. 3:

$$\boxed{\begin{array}{c} x_n \longrightarrow x \ \Rightarrow\ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ φραγμένη } \Leftrightarrow \\ \exists\, C,\, D > 0 \text{ και } N > 0 : \forall n > N \ \rightsquigarrow\ D < |x_n| < C \end{array}}$$

☐ *Απόδ*:

$$\{x_n \longrightarrow x\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{για } \ \epsilon = \frac{|x|}{2},\ \exists N\left(\frac{|x|}{2}\right) > 0\,: \\ n > N\left(\frac{|x|}{2}\right) \ \rightsquigarrow\ |x_n - x| < \frac{|x|}{2} \end{array} \right\}$$

Για $n > N\left(\frac{|x|}{2}\right)$ η τριγωνική ιδιότητα δίνει

$$|x_n| = |(x_n - x) + x| \le |x_n - x| + |x| < \frac{3}{2}|x| = C$$

$$D = \frac{|x|}{2} < |x| - |(x_n - x)| \le |(x_n - x) + x| = |x_n|$$

☐

Πρ. 4:

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{c} x_n \longrightarrow x \\ \\ y_n \longrightarrow y \end{array} \right\} \Rightarrow\ x_n + y_n \longrightarrow x + y}$$

Πρ.

5: $\boxed{\left.\begin{cases} x_n \longrightarrow x \\ \\ y_n \longrightarrow y \end{cases}\right\} \Rightarrow \; x_n \cdot y_n \longrightarrow x \cdot y}$

$\square$ *Απόδ*:

$$\{x_n \longrightarrow x\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0,\; \exists\, N_1(\epsilon) > 0\; : \\ n > N_1(\epsilon) \;\rightsquigarrow\; |x_n - x| < \epsilon \end{array} \right\}$$

$$\text{Πρ. 3} \;\; \rightsquigarrow\; \forall\, n > N_1\left(\frac{|x|}{2}\right) \;\rightsquigarrow\; |x_n - x| < \frac{3|x|}{2}$$

$$\{y_n \longrightarrow y\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0,\; \exists\, N_2(\epsilon) > 0\; : \\ n > N_2(\epsilon) \;\rightsquigarrow\; |y_n - y| < \epsilon \end{array} \right\}$$

Πρόχειρο:

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| = &\;\; |x_n(y_n - y) + (x_n - x)y| \leq \\ \leq &\;\; |x_n| \cdot |y_n - y| + |x_n - x| \cdot |y| \leq \\ \leq &\;\; \tfrac{3|x|}{2}\epsilon + |y|\epsilon = \epsilon' \end{aligned}$$

$$\forall\, \epsilon'\; \exists\, N'(\epsilon') =$$

$$= \max\{N_1\left(\tfrac{\epsilon'}{|y|+3|x|/2}\right),\, N_2\left(\tfrac{\epsilon'}{|y|+3|x|/2}\right).N_1\left(\tfrac{|x|}{2}\right)\}$$

$$n > N'(\epsilon') \;\rightsquigarrow\; |x_n y_n - xy| < \epsilon'$$

$$\Rightarrow\; x_n y_n \longrightarrow xy$$

$\square$

Πρ.

$$6α:\boxed{\left\{\begin{array}{c} 0 \leq x_n \\ \text{και} \\ x_n \longrightarrow x \end{array}\right\} \Rightarrow\ 0 \leq x}$$

$\square$ *Απόδ*: Εστω $x < 0 \ \rightsquigarrow\ \exists\, N\left(\frac{|x|}{2}\right)$:

$n > N\left(\frac{|x|}{2}\right) \ \rightsquigarrow\ |x_n - x| < \frac{|x|}{2} \ \rightsquigarrow\ x_n < 0$ άτοπο. $\square$

Πρ.

$$6β:\boxed{\left\{\begin{array}{c} x_n \leq y_n \\ \text{και} \\ x_n \longrightarrow x, \quad y_n \longrightarrow y \end{array}\right\} \Rightarrow\ x \leq y}$$

Πρ.

$$7:\boxed{\left\{\begin{array}{c} z_n \leq x_n \leq y_n \\ \text{και} \\ z_n \longrightarrow a, \quad y_n \longrightarrow a \end{array}\right\} \Rightarrow\ x_n \longrightarrow a}$$

$\square$ *Απόδ*: Είναι μια άμεση εφαρμογή της προηγούμενης πρότασης.
Αλλη απόδειξη με εψιλοντικό ορισμό:

$$\{y_n \longrightarrow a\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N_1(\epsilon) > 0\ : \\ n > N_1(\epsilon) \ \rightsquigarrow\ a - \epsilon < y_n < a + \epsilon \end{array}\right\}$$

$$\{z_n \longrightarrow a\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N_2(\epsilon) > 0\ : \\ n > N_2(\epsilon) \ \rightsquigarrow\ a - \epsilon < z_n < a + \epsilon \end{array}\right\}$$

$$n > \max\{N_1(\epsilon),\, N_2(\epsilon)\} \ \rightsquigarrow\ a - \epsilon < z_n \leq x_n \leq y_n < a + \epsilon$$

$$\Rightarrow\ x_n \longrightarrow a$$

$\square$

Πρ.

8: $\boxed{x_n \longrightarrow x \text{ και } x \neq 0 \rightsquigarrow \dfrac{1}{x_n} \longrightarrow \dfrac{1}{x}}$

Πρ. 9α: $\boxed{|a| < 1 \Rightarrow a^n \longrightarrow 0}$

□ *Απόδ*: $|a| < 1 \rightsquigarrow |a| = \frac{1}{1+x},\ x > 0 \rightsquigarrow$
$(1+x)^n \geq 1 + nx \rightsquigarrow \frac{1}{|a|^n} \geq 1 + n(\frac{1}{|a|} - 1) \rightsquigarrow$
$|a|^n \leq \frac{1}{1+n(\frac{1}{|a|}-1)} \rightsquigarrow |a|^n \longrightarrow 0$ □ Πρ.

9β: $\boxed{x_n \neq 0,\ |\frac{x_{n+1}}{x_n}| \longrightarrow k < 1 \rightsquigarrow x_n \longrightarrow 0}$

□ *Απόδ*:

$$\begin{gathered}
|\tfrac{x_{n+1}}{x_n}| \longrightarrow k < 1 \Rightarrow \\
\epsilon = \tfrac{1-k}{2},\ \exists\, N\left(\tfrac{1-k}{2}\right) : \\
n > N\left(\tfrac{1-k}{2}\right) > \left[N\left(\tfrac{1-k}{2}\right)\right] = m \rightsquigarrow \\
\left|\,|\tfrac{x_{n+1}}{x_n}| - k\right| < \tfrac{1-k}{2} \rightsquigarrow |\tfrac{x_{n+1}}{x_n}| < k + \tfrac{1-k}{2} = \tfrac{1+k}{2}
\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}
&|x_{m+1}| < \tfrac{1+k}{2}|x_m| \\
&|x_{m+2}| < \tfrac{1+k}{2}|x_{m+1} < \left(\tfrac{1+k}{2}\right)^2 |x_m| \\
&\cdots\cdots \\
&|x_n| = |x_{m+(n-m)}| < \\
&< \left(\tfrac{1+k}{2}\right)^{n-m} |x_m| = \left(\tfrac{1+k}{2}\right)^n \cdot \left(\tfrac{1+k}{2}\right)^{-m} |x_m|
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to 0}|x_n| \leq \underbrace{\lim_{n\to 0}\left(\frac{1+k}{2}\right)^n}_{=0} \cdot \left(\frac{1+k}{2}\right)^{-m} |x_m| = 0$$

□