Λογισμός Ι

Κ. Δασκαλογιάννης

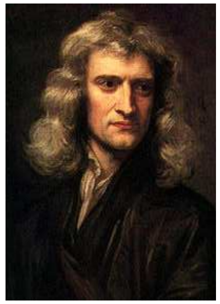
2010

http://users.auth.gr/~daskalo
Γραφείο 3ος όροφος
τηλ. 2310-998074

ΛΟΓΙΣΜΟΣ $\leftrightsquigarrow$ **CALCULUS**

(Διαφορικός Λογισμός, Απειροστικός Λογισμός)

1670 $\sim$ 1740 Ουράνια Μηχανική



Isaac Newton
1648-1727

Gottfried Wilhelm Leibniz
1646-1716

- απειροστά(=πολύ μικρά) μεγέθη,
- άπειρο(=πάρα πολύ μεγάλο),
- όριο συνάρτησης $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, παράγωγος , ...
- υπολογισμός ταχυτήτων, ροπών, ορμών...

ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΓΛΩΣΣΑ

Περιγραφή $\rightsquigarrow$ Γλώσσα $\rightsquigarrow$ Θεσπιση αυστηρών κανόνων

ΑΝΑΛΥΣΗ $\leftrightsquigarrow$ ANALYSIS

$\sim$ 1820–σήμερα

- Συστηματική μελέτη: Πως ορίζεται ο αριθμός; Αξιώματα που θεμελιώνουν το σύνολο των πραγματικών αριθμών
- Ορισμός σύγκλισης, όριου ...
- ακολουθίες, σειρές...
- Ορισμός συνέχειας...

Δημιουργία **ΑΥΤΟΣΥΝΕΠΟΥΣ ΓΛΩΣΣΑΣ**

ΛΟΓΙΣΜΟΣ $\prec$ Μάθημα $\prec$ Ανάλυση

Advanced Calculus ή Elementary Analysis

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- *Απειροστικός Λογισμός*-Τόμος Α′ Σ.Κ. Ντούγιας, LEADER BOOKS, 2003
- *Διαφορικός Ολοκληρωτικός Λογισμός*, M. Spivak, Παν. Εκδ. Κρήτης,
- *ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ*, Ν. Οικονομίδη, Χ. Καριοφύλλη,
- *ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ*, Θ. Κυβεντίδη, εκδ.ΖΗΤΗ
- *Απειροστικός Λογισμός*, THOMAS-FINLEY, Παν. Εκδ. Κρήτης
- Μαθήματα στο δίκτυο: Μαθήματα Μ. Παπαδημητράκη (Παν. Κρήτης) http://www.math.uoc.gr/˜papadim/Apeirostikos1.pdf
- Διαφάνειες: http://users.auth.gr/˜daskalo

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Generic Construction

Αρχαιότητα	$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3, \ldots\}$	Αξιώματα Peano
	$\Downarrow$	$\downarrow$
	(Λύσεις $x + n = 0$)	
	$\Downarrow$	$\downarrow$
(Ινδοί)	$\mathbb{Z} = \{0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots\}$	Προσθετική Ομάδα
	$\Downarrow$	$\downarrow$
Αρχαιότητα	(Λύσεις $qx - p = 0$)	
	$\Downarrow$	$\downarrow$
	$\mathbb{Q} = \{p/q,\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$	Πυκνό πεδίο (field) / σώμα
	$\Downarrow$	$\downarrow$
Αναγέννηση	Λύσεις $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ $\Delta = \beta^2 \geq 4\alpha\gamma$	Τομές Dedekind
	$\Downarrow$	$\downarrow$
Νέοι Χρόνοι	$\mathbb{R}$	Πυκνό πεδίο με διάταξη "συνεχές"

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Μοντέλο Μαθηματικής Θεωρίας

- Αξιώματα = ¨Στοιχειώδεις ’ - ¨απλές ’ - ¨αυτοσυνεπείς ’ αρχές που δεχόμαστε ότι ισχύουν χωρίς απόδειξη
- Προτάσεις (θεωρήματα, λήμματα, συμπεράσματα)= Ιεραρχικό σύστημα προτάσεων η οποίες ξεκινούν από τα αξιώματα ή από προτάσεις που έχουν ήδη αποδειχθεί

Οργανα απόδειξης

- Συμπερασματικός συλλογισμός/Deduction $A \Rightarrow B \Rightarrow C$
- Απόδειξη με επαγωγή / Proof by induction
- Απόδειξη με επαγωγή σε άτοπο / Proof by contradiction

Φυσικοί αριθμοί

ΣΥΣΤΗΜΑ Peano ΑΞΙΩΜΑΤΑ Peano

Ορισμός συνόλου φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$

i) $1 \in \mathbb{N}$

ii) $\forall n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow n+1 \in \mathbb{N}$

iii) $\forall n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow n+1 > 1$

iv) $n = m \rightsquigarrow n+1 = m+1$

v) Αν ένα υποσύνολο $M \subseteq \mathbb{N}$ κατασκευάζεται ως εξής:

$$\left.\begin{array}{c} 1 \in M \\ m \in M \rightsquigarrow m+1 \in M \end{array}\right\} \Rightarrow M = \mathbb{N}$$

Αρχή Επαγωγής

Απόδειξη με επαγωγή/ Proof by induction

Αν $P(m)$ είναι μια πρόταση η οποία εξαρτάται από το $m \in \mathbb{N}$

(i) $P(1)$ αληθεύει

(ii) για ένα $n \in \mathbb{N}$ η πρόταση $P(n)$ αληθεύει $\rightsquigarrow P(n+1)$ αληθεύει

συνεπάγεται ότι **η πρόταση $P(n)$ είναι αληθινή για κάθε $n \in \mathbb{N}$**

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Γεωμετρικό Αθροισμα

$$1 + t + t^2 + \cdots + t^n = \boxed{\sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}}$$

Τύπος Newton

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \rightsquigarrow \boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

Τύποι "Gauss"

$$\boxed{1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Τύπος "Bernoulli"

$$\boxed{x \geq -1 \rightsquigarrow (1+x)^n \geq 1 + nx}$$

Προτάσεις που αποδεικνύονται με επαγωγή

- Αν $n \geq 2$ τότε $n^3 - n$ διαιρείται με το 3
- $n < 2^n$
- $5^n - 1$ διαιρείται με το 4
- $9^n + 3$ διαιρείται με το 4
- $3^n > n^2$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

Τύπος Newton

παραγοντικό/factorial
$$0! = 1$$
$$n! = n \cdot (n-1)! \rightsquigarrow n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

Συνδιασμός n πραγμάτων ανά k $\quad \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

$$\tbinom{n}{0} = 1,\ \tbinom{n}{1} = n,\ \tbinom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},\ \tbinom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!},$$
$$\boxed{\tbinom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!}}$$

$$\begin{aligned}(a+b)^n =& b^n + nab^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}a^2b^{n-2} + \cdots + \\ &+ \binom{n}{m}a^m b^{n-m} + \cdots + na^{n-1}b + a^n\end{aligned}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \rightsquigarrow \boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \left(\sum_{k=m}^{n-1} a_k\right) + a_n$$

Παράδειγμα :

$$A = \sum_{k=1}^{5} x^k$$

$$A = \sum_{k=1}^{4} x^k + x^5$$

$$A = \sum_{k=1}^{3} x^k + x^4 + x^5$$

$$A = \sum_{k=1}^{2} x^k + x^3 + x^4 + x^5$$

$$A = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$

$$\left(\sum_{k=m}^{n} a_k\right) \underbrace{=}_{k\to\ell+1} \left(\sum_{\ell=m-1}^{n-1} a_{\ell+1}\right) \underbrace{=}_{\ell\to k} \left(\sum_{k=m-1}^{n-1} a_{k+1}\right)$$

Παράδειγμα : $A = \sum_{k=1}^{5} x^k = \sum_{k=0}^{4} x^{k+1}$

$$A = \sum_{k=0}^{4} x^{k+1}$$

$$A = \sum_{k=0}^{3} x^{k+1} + x^5$$

$$A = \sum_{k=0}^{2} x^{k+1} + x^4 + x^5$$

$$A = \sum_{k=0}^{1} x^{k+1} + x^3 + x^4 + x^5$$

$$A = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$