ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι / ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

$\boxed{\text{ΤΜΗΜΑ 1α}}$

31 Ιανουαρίου 2006

ΘΕΜΑ 1^o (2 βαθμ.) Εστω A ένα φραγμένο σύνολο στο $\mathbb{R}$ και $\inf\ A > 0$.
Θέτουμε $A^{-1} \equiv \left\{\frac{1}{x}\ :\ x \in A\right\}$. Αποδείξτε ότι $\sup\ A^{-1} = \dfrac{1}{\inf\ A}$

ΘΕΜΑ 2^o (2 βαθμ.) Η ακολουθία x_n ορίζεται με τις αναδρομικές σχέσεις

$$x_1 = 2, \quad \text{και} \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

Αποδείξτε ότι
(α') $x_n \geq \sqrt{2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$
(β') $x_{n+1} \leq x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$
(γ') Η ακολουθία x_n συγκλίνει, και να βρεθεί το όριο της

ΘΕΜΑ 3^o (1 βαθμ.) Να βρεθούν τα όρια των παρακάτω ακολουθιών

$$(a) \quad x_n = \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \qquad (b) \quad x_n = \frac{(\ln 2)^k + (\ln 3)^k + \cdots + (\ln n)^k}{1 + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$(c) \quad x_n = \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^2} \qquad (d) \quad x_n = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n}$$

ΘΕΜΑ 4^o (1 βαθμ.) Να μελετηθεί αν οι παρακάτω σειρές συκλίνουν και αν η σύγκλιση είναι απλή (κατ' εκδοχήν) ή απόλυτη

$$\text{(i)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n(n+1)}}{n^{2n}} \quad \text{(ii)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ (\ln n)^2} \quad \text{(iii)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n} \quad \text{(iv)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{5^{2n}\,(n!)^2}$$

ΘΕΜΑ 5^o (1.5 βαθμ.) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{x}$. Να υπολογισθεί η $f^{(40)}(0)$.
ΘΕΜΑ 6^o (1.5 βαθμ.) Δίνεται η καμπύλη που περιγράφεται από τις παραμετρικές εξισώσεις

$$x(t) = t - \sin\ t \quad \text{και} \quad y(t) = \cos\ t$$

Να υπολογισθεί το $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ σαν συνάρτηση του t.

ΘΕΜΑ 7^o (1 βαθμ.) Αν $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0,\ 2]$ και $f(0) = f(2)$, αποδείξτε ότι $\exists\, \xi \in [0,\ 1] \ \rightsquigarrow\ f(\xi) = f(1+\xi)$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !
