# ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι $\boxed{\text{ΤΜΗΜΑ 16}}$

*5 Σεπτεμβρίου 2005*

**ΘΕΜΑ 1$^o$** ($0.75 + 0.75 = 1.5$ β.)

**(α)** Χρησιμοποιώντας τον εψιλοντικό ορισμό του ορίου αποδείξτε την ακόλουθη πρόταση:
Αν $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ και $a_n > 0$ και $a > 0$ τότε $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$

**(β)** Αποδείξτε ότι η ακολουθία

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$$

είναι μια ακολουθία Cauchy, χρησιμοποιώντας τον εψιλοντικό ορισμό της ακολουθίας Cauchy.

**ΘΕΜΑ 2$^o$** ($6 \times 0.25 = 1.5$ β.) Να μελετηθεί η αν οι παρακάτω σειρές συκλίνουν απλά (κατ' εκδοχήν) ή απόλυτα

$$\text{(i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^n} \qquad \text{(ii)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \qquad \text{(iii)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$$

$$\text{(iv)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{(v)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{(vi)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}$$

**ΘΕΜΑ 3$^o$** (2 β.) Να βρεθεί το ανάπτυγμα Mac Laurin της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\sin(5x)}{\sin x}$$

**ΘΕΜΑ 4$^o$** ($1.5 + 1.5 = 3$ β.)

**(α)** Εστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ έχει συνεχή πρώτη παράγωγο $f'(x)$ στο διάστημα $[a,\, b]$ πού είναι και παραγωγίσιμη $(a,\, b)$. Αποδείξτε ότι αν υπάρχει κάποιο $c \in (a,\, b)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{f(b) - f(c)}{b - c} = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$$

Τότε υπάρχει $\xi \in (a,\, b)$ για το οποίο $f''(\xi) = 0$.

**(β)** Εστω ότι η συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται στο κλειστό διάστημα $[0,\, 1]$ και παίρνει τιμές στο ίδιο διάστημα, δηλ. $0 \le f(x) \le 1$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [0,\, 1]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$.

**ΘΕΜΑ 5$^o$** (2 β.) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} (x^2)^x & \text{γιά} \quad x \neq 0; \\ 1 & \text{γιά} \quad x = 0. \end{cases}$$

**α)** Αποδείξτε ότι η $f(x)$ είναι συνεχής και να βρεθεί τα όρια της για $x \to \pm\infty$

**β)** Να υπολογισθεί η $f'(x)$, και να βρεθεί το όριο της παραγώγου για $x \to 0$

**γ)** Να μελετηθεί η γραφική παράσταση της $f(x)$ για $-\infty < x < \infty$

---

*ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !*

---

**Χρήσιμοι τύποι**:

$$\sin x = \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos x = \frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \mathrm{e}^{-1} = 0.367879$$