# ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι $\boxed{\textbf{ΤΜΗΜΑ 1б}}$

*24 Ιανουαρίου 2005*

Τα θέματα 1, 2, 3 και 4 είναι υποχρεωτικά. Από τα θέματα 5 και 6 θα επιλέξετε 1 θέμα. Δηλαδή θα γράψετε ΜΟΝΟ 5 θέματα.

---

**ΘΕΜΑ 1$^o$** $(1.5 + 0.5 = 2$ β.)

**(α)** Να αποδειχθεί ότι η δυναμοσειρά:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)}\, x^n$$

συγκλίνει απόλυτα για $|x| < 1$, αποδείξτε ότι τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)}\, x^n = -\frac{\ln(1-x)(1+x)+x}{x}$$

Αποδείξτε ότι η σειρά δεν συγκλίνει για $|x| > 1$. Εξετάστε την σύγκλιση της σειράς για $x = 1$ και $x = -1$.

---

**ΛΥΣΗ**: Θέτουμε

$$a_n = \frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$

Εχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x|$$

Επομένως χρησιμοποιώντας το κριτήριο των λόγων (κριτήριο d' Alembert) έχουμε ότι για $|x| < 1$ η σειρά συγκλίνει απόλυτα, για $|x| > 1$ η σειρά δεν συγκλίνει. Ειδικά για $|x| < 1$ έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)}\, x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \underbrace{=}_{n+1\to m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + \frac{1}{x}\sum_{m=2}^{\infty} \frac{x^m}{m}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)}\, x^n = -\ln(1-x) + \frac{1}{x}\Big(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m} - x\Big) = -\ln(1-x) - \frac{1}{x}\ln(1-x) - 1 = -\frac{\ln(1-x)(1+x)+x}{x}$$

Για $x = 1$ η σειρά γίνεται:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right)$$

και δεν συγκλίνει.

Για $x = -1$ η σειρά γίνεται:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(-1)^n, \qquad a_n > 0 \quad \text{και είναι φθίνουσα} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

οπότε έχουμε μια κυμαινόμενη (εναλλάσσουσα σειρά) και οι συντελεστές είναι μια φθίνουσα μηδενική ακολουθία, άρα η σειρά συγκλίνει.

**Εναλλακτική λύση:** Για $x = -1$ Τα μερικά αθροίσματα της σειράς γράφονται:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \, \frac{2n+1}{n(n+1)} \; = \; \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \, \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\begin{aligned}
S_1 &= -\left(1 + \tfrac{1}{2}\right) \\
S_2 &= -\left(1 + \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\right) = -1 + \tfrac{1}{3} \\
S_3 &= S_2 - \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) = -1 - \tfrac{1}{4} \\
S_4 &= S_3 + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5}\right) = -1 + \tfrac{1}{5} \\
& \ldots \\
S_N &= S_{N-1} + (-1)^N \left(\tfrac{1}{N} + \tfrac{1}{N+1}\right) = -1 + (-1)^N \tfrac{1}{N+1}
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \; = \; \lim_{N\to\infty} S_N \; = \; -1$$

---

**(β)** Να μελετηθεί η σύγκλιση της ακολουθίας $a_n = \frac{n!}{n^n}$ για $n \to \infty$

---

**ΛΥΣΗ**: Εχουμε

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \, \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \underbrace{\to}_{n\to\infty} \frac{1}{e} < 1$$

οπότε η ακολουθία συγκλίνει στο μηδέν (η άσκηση είναι το λυμένο παράδειγμα σελ. 53 του βιβλίου Κυβεντίδη)

**Εναλλακτικός τρόπος λύσης**:

$$a_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1) \cdot n}{\underbrace{n \cdots n \cdot n}_{n \text{ φορές}}} = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\frac{2}{n} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n}}_{n-1 \text{ φορές}} \leq \frac{1}{n} \to 0 \implies a_n \to 0$$

---

**ΘΕΜΑ 2$^o$** $(0.5 + 0.25 + 0.5 + 0.75 = 2$ β.)

**(α)** Να μελετηθεί και να σχεδιασθεί η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ για $x \geq 0$.

---

**ΛΥΣΗ**: Η συνάρτηση γράφεται $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x} = \left( \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} \right) \left( \lim_{x\to 0+} \ln x \right) = \infty(-\infty) = -\infty \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0+} f(x) = 0$$

και από τους κανόνες de l' Hospital έχουμε:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to\infty} f(x) = 1$$

Επίσης

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left( \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}} \right) = \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}} \frac{d}{dx} \left( \frac{\ln x}{x} \right) = x^{\frac{1}{x}} \left( \frac{1 - \ln x}{x^2} \right)$$

Οπότε για $x = \mathrm{e}$ η παράγωγος μηδενίζεται, για $0 < x < \mathrm{e}$ η παράγωγος είναι θετική για $x > \mathrm{e}$ η παράγωγος είναι αρνητική, άρα η συνάρτηση έχει τοπικό μέγιστο για $x = \mathrm{e}$

---

**(β)** Να βρεθεί ο μεγαλύτερος από τους αριθμούς

$$1,\ \sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[4]{4},\ \sqrt[5]{5},\ \ldots,\ \sqrt[n]{n},\ldots$$

χωρίς να χρησιμοποιηθεί υπολογιστής για οποιονδήποτε υπολογισμό.

---

**ΛΥΣΗ**: Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}$ έχει τοπικό μέγιστο για $x = \mathrm{e} = 2.718$ και $f(n) = \sqrt[n]{n}$, οπότε τα σημεία που είναι πιο κοντά στο $x = \mathrm{e}$ είναι το $x = 2$ και $x = 3$. Αλλά $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}$ γιατί

$$2^3 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6 < \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6 = 3^2$$

(Εναλλακτικά: Επειδή $f(2) = \sqrt{2} = \sqrt[4]{4} = f(4)$ επομένως το μέγιστο από το θεώρημα του Rolle βρίσκεται στο ανοικτό διάστημα $(2,4)$ επομένως το $3 \in (2,4)$ και $f(3) > f(2) = f(4)$ άρα το $f(3) = \sqrt[3]{3}$ είναι ο μεγαλύτερος αριθμός)

---

**(γ)** Να αποδειχθεί ότι η σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(n^{\frac{1}{n}} - 1\right) \cos(n\pi)$$

συγκλίνει.

---

**ΛΥΣΗ**: Από την μελέτη της συνάρτησης $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ ξέρουμε ότι η ακολουθία $a_n = n^{1/n} - 1$ είναι μια φθίνουσα μηδενική ακολουθία για $n \to \infty$. Επίσης $\cos(n\pi) = (-1)^n$ επομένως έχουμε μια κυμαινουμένη (εναλλάσσουσα) ακολουθία που συγκλίνει.

---

**(δ)** Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ είναι συνάρτηση Lipschitz για $x \in \mathbb{R}$ και να αποδειχθεί ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής.

---

**ΛΥΣΗ**:

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}} \right| = \frac{|x+y|}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}}|x-y| \leq \frac{|x+y|}{|x|+|y|}|x-y| \leq |x-y| < 2|x-y|$$

οπότε η συνάρτηση $f(x)$ είναι μια συνάρτηση Lipschitz για $x \in \mathbb{R}$ και είναι επομένως ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$ γιατί

$$\forall \epsilon > 0\, \exists\, \delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{2}\ :\ |x-y| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

---

**ΘΕΜΑ 3$^o$** (2 β.) Υπολογίστε την τιμή της 23ης και της 24ης παραγώγου για $x = 0$ της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\cosh(3x)}{\cosh x}$$

---

**ΛΥΣΗ**: Η συνάρτηση $f(x)$ γράφεται:

$$f(x) = \frac{\frac{e^{3x}+e^{-3x}}{2}}{\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}} = \frac{(e^{x})^3+(e^{-x})^3}{e^{x}+e^{-x}} = e^{2x}+e^{-2x}-1 = 2\cosh(2x)-1 = 1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$$

Το ανάπτυγμα Mac Laurin της συνάρτησης $f(x)$ γράφεται:

$$f(x) = f(0) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m = 1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}$$

οπότε για $m =$περιττός θα έχουμε $f^{(m)}(0) = 0$ δηλαδή

$$f^{(23)}(0) = 0$$

Για να βρούμε την 24η παράγωγο της $f(x)$ θα πρέπει να συγκρίνουμε στις δυό σειρές την 24η δύναμη του $x$, δηλαδή στην μια να πάρουμε τον όρο για $m = 24$ και στην άλλη τον όρο για $n = 12 \implies 2n = 24$ οπότε θα έχουμε: $\frac{f^{(24)}(0)}{24!} = 2\frac{2^{24}}{24!}$. Επομένως βρίσκουμε ότι

$$f^{(24)}(0) = 2^{25}$$

---

**ΘΕΜΑ 4$^o$** (2 β.)

**(α)** Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^p$ είναι κυρτή για $p > 1$ και $x > 0$.

---

**ΛΥΣΗ**: Αν $f''(x) > 0$ τότε η συνάρτηση είναι κυρτή. Στην περίπτωσή μας έχουμε $f''(x) = p(p-1)x^{p-2} > 0$ για $p > 1$ και $x > 0$.

---

**(β)** Αποδείξτε ότι

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^{\frac{9}{8}} \leq \frac{x_1^{\frac{9}{8}}+x_2^{\frac{9}{8}}+x_3^{\frac{9}{8}}}{3}$$

---

**ΛΥΣΗ**: Η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{9}{8}}$ είναι κυρτή επομένως για κάθε $\lambda \in [0,\, 1]$

$$(\lambda x + (1-\lambda)y)^{\frac{9}{8}} \leq \lambda x^{\frac{9}{8}} + (1-\lambda)y^{\frac{9}{8}}$$

οπότε

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^{\frac{9}{8}} = \left(\frac{2}{3}\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{1}{3}x_3\right)^{\frac{9}{8}} \underbrace{\leq}_{\lambda=\frac{2}{3}} \frac{2}{3}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{\frac{9}{8}}+\frac{1}{3}x_3^{\frac{9}{8}} \underbrace{\leq}_{\lambda=\frac{1}{2}} \frac{2}{3}\frac{x_1^{\frac{9}{8}}+x_2^{\frac{9}{8}}}{2}+\frac{x_3^{\frac{9}{8}}}{3}$$

Σημ: Αυτή η ιδιότητα είναι μερική περίπτωση της γενικής πρότασης:

$$f(x) \quad \text{κυρτή} \;\Rightarrow\; f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

---

**ΘΕΜΑ 5$^o$** (2 β.)

(I) Η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a,\, b]$. Εχει συνεχή πρώτη παράγωγο $f'(x)$ και ορίζεται η δεύτερη παράγωγος $f''(x)$ για κάθε $x \in (a,\, b)$. Αν η συνάρτηση $f(x)$ έχει τρείς ρίζες:

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0, \qquad a < x_1 < x_2 < x_3 < b$$

Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα $\xi \in (a,\, b)$ όπου μηδενίζεται η δεύτερη παράγωγος $f''(\xi) = 0$. Ισχύει το αντίστροφο;

---

**ΛΥΣΗ**: Η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1, x_2]$ και έχει πρώτη παράγωγο στο $(x_1, x_2)$, επίσης $f(x_1) = f(x_2)$ άρα Θεώρημα Rolle $\Longrightarrow$ υπάρχει $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = 0$.

Η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[x_2, x_3]$ και έχει πρώτη παράγωγο στο $(x_2, x_3)$, επίσης $f(x_2) = f(x_3)$ άρα Θεώρημα Rolle $\Longrightarrow$ υπάρχει $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = 0$.

Η συνάρτηση $f'(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ και έχει παράγωγο $f''(x)$στο $(\xi_1, \xi_2)$, επίσης $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ άρα Θεώρημα Rolle $\Longrightarrow$ υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

Το αντίστροφο δεν είναι αληθές, υπάρχει συνάρτηση με $f''(\xi) = 0$ που δεν έχει τρείς ρίζες πχ $f(x) = x^3$ και $\xi = 0$.

---

(II) Αν $A$ και $B$ είναι φραγμένα σύνολα να αποδείξετε ότι $\sup\,(A + B) \;=\; \sup\, A + \sup\, B$

---

**ΛΥΣΗ**: Εστω $z \in A + B$ αυτό σημαίνει ότι $z = x + y$ με $x \in A$ και $y \in B$. Αρα

$$\forall z \in A + B \implies z = x + y \leq \sup\, A \,+\, \sup\, B \implies \sup(A + B) \;\leq\; \sup\, A \,+\, \sup\, B$$

Θα αποκλείσουμε την περίπτωση $\sup(A + B) \;<\; \sup\, A \,+\, \sup\, B$.

Υποθέτουμε ότι $\sup(A + B) \;<\; \sup\, A \,+\, \sup\, B \implies \sup(A + B) - \sup\, A \;<\; \sup\, B$ αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα $v \in B$ τέτοιο ώστε $\sup(A + B) - \sup\, A \;<\; v$ ( Σημ: αν δεν υπήρχε τέτοιο $v$ τότε θα είχαμε $\sup(A + B) - \sup\, A$ άνω όριο του $B$ δηλαδή $\sup(A + B) - \sup\, A \;\geq\; \sup\, B$ που είναι αντίθετο από την υπόθεση που κάναμε). Τότε όμως $\sup(A + B) - v \;<\; \sup\, A$, δηλαδή υπάρχει $u \in A$ τέτοιο ώστε $\sup(A + B) - v \;<\; u$ δηλαδή $\sup(A + B) \;<\; u + v$, αυτό όμως σημαίνει ότι υπάρχει στοιχείο στο $u + v \in A + B$ που είναι μεγαλύτερο από το $\sup(A + B)$ πράγμα άτοπο. Επομένως η υπόθεσή μας δεν είναι αληθής και τότε αναγκαστικά $\sup\,(A + B) \;=\; \sup\, A + \sup\, B$.

---

**ΘΕΜΑ 6$^o$** (2 β.)

**(I)** Εστω $\alpha \neq 0$ ένας πραγματικός αριθμός. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ότι έχει τις ακόλουθες ιδότητες:

$$f(1) = \alpha, \qquad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

για κάθε $x$ και $y$. Αποδείξτε τα εξής:

**(α)** $f(nx) = nf(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

**ΛΥΣΗ**: Για $n = 1$ αληθεύει προφανώς η πρόταση. Αν είναι αληθινή για κάποιο $n$ τότε:

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$$

**(β)** $f(1/m) = \alpha/m$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$

**ΛΥΣΗ**:

$$\left.\begin{array}{rl} f(m\frac{1}{m}) = & f(1) = \alpha \\ = & mf(\frac{1}{m}) \end{array}\right\} \implies f(1/m) = \alpha/m$$

**(γ)** $f(\rho) = \alpha\rho$ για κάθε $\rho$ θετικό ρητό αριθμό

**ΛΥΣΗ**:

$$\rho = \frac{n}{m} \implies f(\rho) = f(n/m) = \frac{n\alpha}{m} = \rho\alpha$$

**(δ)** $f(0) = 0$ και $f(-x) = -f(x)$

**ΛΥΣΗ**:

$$f(x) = f(x+0) = f(x)+f(0) \implies f(0) = 0 \qquad 0 = f(0) = f(x-x) = f(x)+f(-x) \implies f(-x) = -f(x)$$

**(ε)** Αποδείξτε ότι $f(x) = \alpha x$ για κάθε $x$ θετικό ή αρνητικό πραγματικό αριθμό.

**ΛΥΣΗ**: Αν $x \in \mathbb{R}$ και $x > 0$ τότε υπάρχει μια ακολουθία $x_n \in \mathbb{Q}$ και $x_n > 0$ τέτοια ώστε $x_n \to x$. Επειδή η συνάρτηση είναι συνεχής θα έχουμε:

$$x_n \to x \implies f(x_n) \to f(x) \implies \alpha x_n \to f(x) \implies f(x) = \alpha x$$

Ανάλογη απόδειξη ισχύει όταν $x < 0$

**(II)** Αν $A$ και $B$ είναι φραγμένα σύνολα να αποδείξετε ότι $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$

**ΛΥΣΗ**: Εστω $z \in A + B$ αυτό σημαίνει ότι $z = x + y$ με $x \in A$ και $y \in B$. Αρα

$$\forall z \in A + B \implies z = x + y \geq \inf A + \inf B \implies \inf(A+B) \geq \inf A + \inf B$$

Θα αποκλείσουμε την περίπτωση $\inf(A+B) > \inf A + \inf B$.

Υποθέτουμε ότι $\inf(A+B) > \inf A + \inf B \implies \inf(A+B) - \inf A > \inf B$ αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα $v \in B$ τέτοιο ώστε $\inf(A+B) - \inf A > v$ ( Σημ: αν δεν υπήρχε τέτοιο $v$ τότε θα είχαμε $\inf(A+B) - \inf A$ κάτω όριο του $B$ δηλαδή $\inf(A+B) - \inf A \leq \inf B$ που είναι αντίθετο από την υπόθεση που κάναμε). Τότε όμως $\inf(A+B) - v > \inf A$, δηλαδή υπάρχει $u \in A$ τέτοιο ώστε $\inf(A+B) - v > u$ δηλαδή $\inf(A+B) > u + v$, αυτό όμως σημαίνει ότι υπάρχει στοιχείο στο $u+v \in A+B$ που είναι μικρότερο από το $\inf(A+B)$ πράγμα άτοπο. Επομένως η υπόθεσή μας δεν είναι αληθής και τότε αναγκαστικά $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$.