ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι, Τμημα β+γ, Χειμ. εξαμ. 2011

Ασκήσεις, Φυλλαδιο 6

1. Δειξετε οτι η συναρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \text{ αρρητος} \\ 1, & \text{αν } x \text{ ρητος,} \end{cases}$ ειναι συνεχης στα σημεια $-1, 1$ και σε κανενα αλλο σημειο.
2. Σε καθε ενα απο τα επομενα βρειτε το οριο, ή δειξετε οτι δεν υπαρχει
$$(a) \lim_{x\to 0} \sqrt{x}\sin(\frac{1}{x}), \qquad (b) \lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right), \qquad (c) \lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right].$$
3. Δειξετε οτι αν $f : [0, 1] \to [0, 1]$ ειναι συνεχης συναρτηση τοτε υπαρχει $\xi \in [0, 1]$ με $f(\xi) = \xi$.
4. Μελετησετε την συμπεριφορα των συναρτησεων κοντα στο σημειο $x_0 = 0$.
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
5. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συναρτηση που ικανοποιει την συναρτησιακη εξισωση Cauchy:
$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \text{για καθε} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$
Δειξετε οτι:
(α) $f(0) = 0$ και $f(-x) = -f(x)$ για καθε $x \in \mathbb{R}$.
(β) Υπαρχει $c \in \mathbb{R}$ ωστε $f(\frac{1}{n}) = \frac{c}{n}$ για καθε $n \in \mathbb{N}$.
(γ) $f(r) = cr$ για καθε $r \in \mathbb{Q}$.
(δ) Αν η f ειναι επιπλεον συνεχης τοτε $f(x) = cx$ για καθε $x \in \mathbb{R}$.
6. Αν a, b ειναι θετικοι αριθμοι βρειτε τα ορια $\lim_{x\to 0^+}(\frac{x}{a}[\frac{b}{x}])$ και $\lim_{x\to 0^+}(\frac{b}{x}[\frac{x}{a}])$
7. Βρειτε σε ποια σημεια ειναι συνεχης η συναρτηση $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \text{ αρρητος,} \\ |\cos(x)|, & \text{αν } x \text{ ρητος.} \end{cases}$
8. Δωσετε παραδειγμα συναρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που δεν ειναι συνεχης σε κανενα σημειο, αλλα η $|f|$ ειναι συνεχης παντου.
9. Εστω $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ συναρτηση με την ιδιοτητα: Για καθε $a > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(a + n) = 0$. Επεται τοτε οτι $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$; (υποδ.: θεωρησετε την $f(x) = 1$ αν $x = n\sqrt{2}$, $n \in \mathbb{N}$, και $f(x) = 0$ για $x \neq n\sqrt{2}$).
10. Εστω $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ συναρτηση με την ιδιοτητα: Για καθε $a > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(an) = 0$. Επεται τοτε οτι $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$; (υποδ.: θεωρησετε την $f(x) = 1$ αν $x = n\sqrt[n]{2}$, $n \in \mathbb{N}$, και $f(x) = 0$ για $x \neq n\sqrt[n]{2}$).
11. Εστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση και $f(0) = f(1)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = f(\xi + \frac{1}{2})$.
12. Αποδείξτε ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 7x^3 - 9$ έχει τουλάχιστον δύο πραγματικές ρίζες.
13. Δείξετε ότι
$$(i) \lim_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = n, \qquad (ii) \lim_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1} = \frac{n}{m}$$
14. Δείξετε ότι
$$\lim_{x\to\xi} \max\{f(x), g(x)\} = \max\{ \lim_{x\to\xi} f(x) , \lim_{x\to\xi} g(x) \}$$
$$\lim_{x\to\xi} \min\{f(x), g(x)\} = \min\{ \lim_{x\to\xi} f(x) , \lim_{x\to\xi} g(x) \}$$
15. Εστω $f(x)$ μια συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$, που έχει την ιδιότητα
$$\forall x \in [a, b] \quad \exists y \in [a, b] \text{ ωστε } |f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|.$$
Δείξετε ότι $\exists \xi \in [a, b]$ ωστε $f(\xi) = 0$.